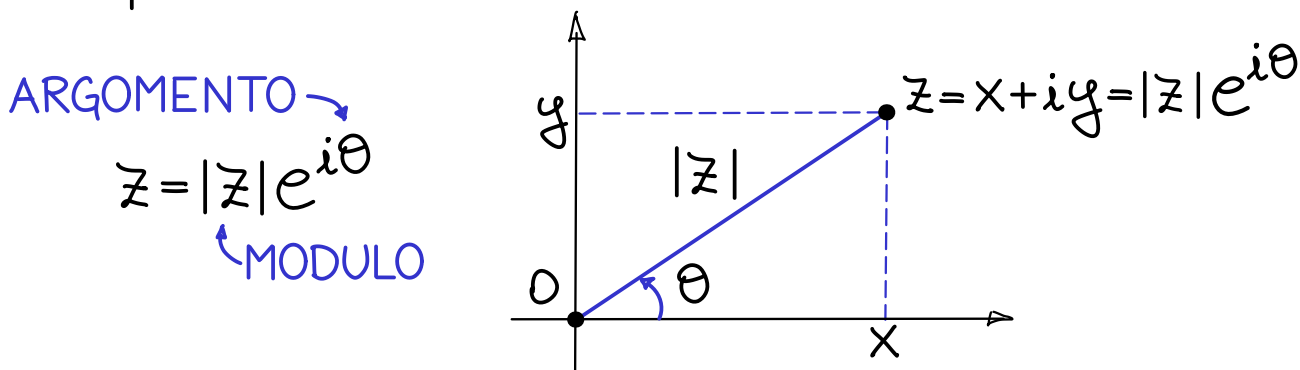


ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 31

Un altro modo di rappresentare un numero complesso $z \neq 0$ è la FORMA ESPONENZIALE:



L'ARGOMENTO θ è "un" angolo orientato, espresso in radianti, dalla semiretta positiva dell'asse reale alla semiretta da 0 a z . θ è determinato a meno di multipli interi di 2π :

$$\theta = \theta_p + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta_p \in (-\pi, \pi].$$

\leftarrow ARGOMENTO PRINCIPALE

Per la conversione dalla forma esponenziale a quella cartesiana e viceversa valgono le seguenti formule:

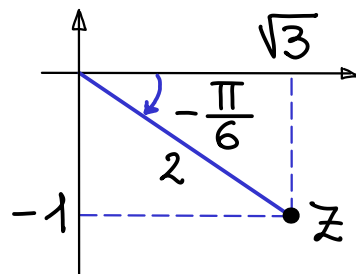
ESP \rightarrow CART	CART \rightarrow ESP
$\begin{cases} x = z \cos(\theta) \\ y = z \sin(\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_p = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{ z }\right) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{ z }\right) & \text{se } y < 0 \end{cases} \end{cases}$

ESEMPI

• $z = \sqrt{3} - i$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

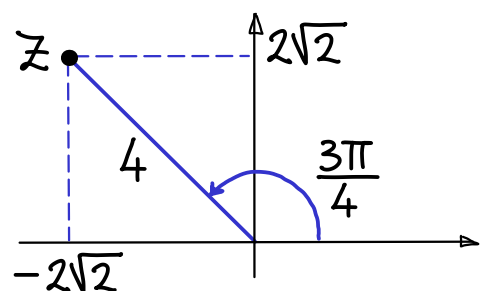
$$\text{così } z = |z|e^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



• $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ y = 4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{così } z = x + iy = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$



OSSERVAZIONE L'identità

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

è detta FORMULA DI EULERO. L'uso del simbolo $e^{i\theta}$ è motivato dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

In particolare la potenza n -sima di z

$$\text{si scrive come } z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$$

RADICI M-SIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Consideriamo l'equazione

$$z^m = w$$

dove $w \in \mathbb{C}$ e $m > 0$ è un intero da risolvere rispetto a $z \in \mathbb{C}$. Ogni soluzione z si dice RADICE M-SIMA di w .

Se $w=0$ allora $z=0$ è l'unica radice m -sima con molteplicità m .

Se $w \neq 0$ allora ci sono m radici m -sime z_0, z_1, \dots, z_{m-1} ciascuna con molteplicità 1.

Per trovarle usiamo la forma esponenziale di z e w : $z = |z|e^{i\theta}$, $w = |w|e^{i\varphi}$

Così l'equazione

$$|z|^m e^{im\theta} = z^m = w = |w|e^{i\varphi}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} |z|^m = |w| \\ m\theta = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

uguali e meno di angoli giri

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[m]{|w|} \\ \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{m} \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

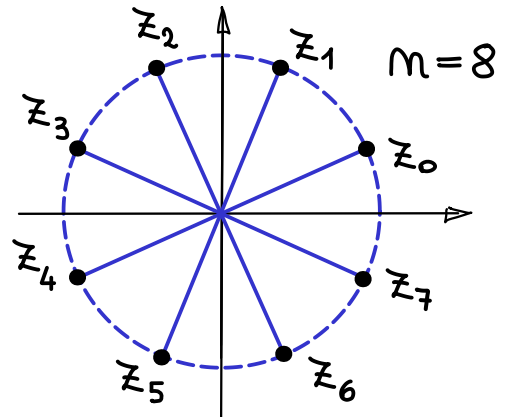
argomenti non equivalenti

da cui

$$z_k = \sqrt[m]{|w|} \exp\left(i \frac{\varphi + 2\pi k}{m}\right) \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

OSSERVAZIONE

Le radici m -sime di W
 z_0, z_1, \dots, z_{m-1} sono i
vertici di un poligono
regolare di m -lati.



Se $m=2$ e $W \neq 0$ le 2 radici quadrate sono

$$z^2 = W = |W| e^{i\varphi} \begin{cases} z_0 = \sqrt{|W|} e^{i\varphi/2} \\ z_1 = \sqrt{|W|} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = z_0 e^{i\pi} = -z_0 \end{cases} \leftarrow \text{opposte}$$

ESEMPI

- Calcolare le radici terze di $8i$ ossia risolvere
 $z^3 = 8i$.

Abbiamo che $8i = |8i| e^{i\frac{\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ e quindi le
sue radici terze sono

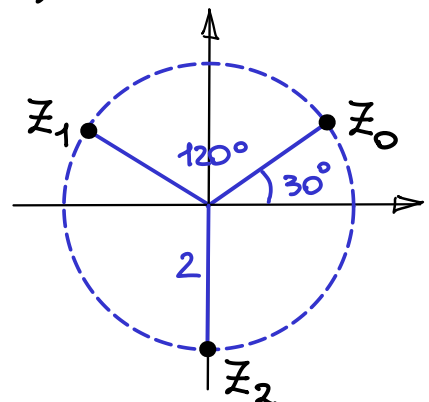
$$z_k = \sqrt[3]{8} \exp\left(i \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) \text{ con } k=0,1,2$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$



- Risolvere $z^4 = -4$ (radici quarte di -4).

Si ha che $-4 = 4e^{i\pi}$ e radici quarte sono

$$z_k = \sqrt[4]{4} \exp\left(i \frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) \text{ con } k=0,1,2,3$$

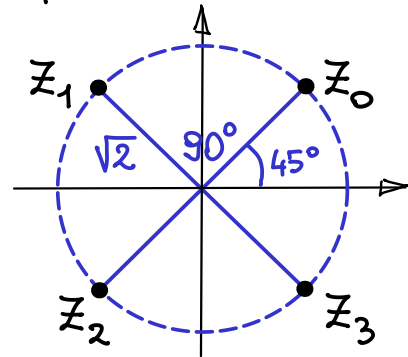
che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\overset{1/\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} + i \overset{1/\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = i z_0 = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = (i)^2 z_0 = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} = (i)^3 z_0 = 1 - i$$



- Risolvere $z^6 = 1$ (radici seste di 1)

Si ha che $1 = |1|e^{i0} = 1e^{i0}$ e le radici seste sono

$$z_k = \sqrt[6]{1} \exp\left(i \frac{0 + 2\pi k}{6}\right) \text{ con } k=0,1,2,3,4,5$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = e^{i0} = 1 = -z_3$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_4$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_5$$

