ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 29

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARE DEL PRIMO ORDINE

Un' EQUAZIONE DIFFERENZIALE è un'equazione dove compaiono una funzione incognita $y(x)$ e alcune sue derivate.
L'ordine massimo di derivazione di $y(x)$ è l'ORDINE dell'equazione differenziale.

EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE

$$y''(x)+2e^{x}y(x)=\operatorname{sen}(x)$$

LINEARE

EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE

$$y'(x)+xy^2(x)=\frac{1}{x}$$

NON LINEARE

EQ. DIFF. DEL 3° ORDINE

$$y'''(x)=\sqrt{x}\,y(x)+y'(x)+2$$

LINEARE

EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE

$$y''(x)=y(x)y'(x)+\log(x)$$

NON LINEARE

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzioni (se esistono).
Un semplice esempio è

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE LINEARE

dove si nota subito che le soluzioni sono le primitive di $\frac{1}{1+x^2}$ e integrando si ottengono infinite soluzioni:

$$y(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}(x)+c \quad \text{con } c\in\mathbb{R}.$$

Una generica EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARE DEL PRIMO ORDINE ha la seguente forma

$$y'(x)+a(x)y(x)=f(x) \qquad (*)$$

dove $f(x)$ e $a(x)$ sono funzioni continue in un certo intervallo I.

Per risolvere l'equazione si moltiplicano i due membri di $(*)$ per il FATTORE INTEGRANTE

$$e^{A(x)}$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$:

$$\underbrace{e^{A(x)}\cdot y'(x)+e^{A(x)}a(x)y(x)}_{\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}\cdot y(x)\right)}=e^{A(x)}\cdot f(x)$$

Riconosciuta la derivata a sinistra, ora basta integrare

$$e^{A(x)}\cdot y(x)=\int\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}\cdot y(x)\right)dx=\int e^{A(x)}\cdot f(x)\,dx$$

e si arriva alla SOLUZIONE GENERALE

$$\boxed{y(x)=e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\cdot f(x)\,dx+c\right)}$$

infinite soluzioni

dove c è la solita costante additiva dell'integrazione indefinita che qui è stata messa in evidenza.

ESEMPIO

- Trovare la soluzione generale di
$$y'(x)+y(x)=x.$$

Una primitiva di $a(x)=1$ è $A(x)=x$. Allora il fattore integrante è
$$e^{A(x)}=e^x.$$

Quindi
$$\int e^{A(x)}\cdot f(x)\,dx=\int e^x x\,dx=\int x\,d(e^x)=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+c$$

e così la soluzione generale è
$$y(x)=e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\cdot f(x)\,dx\right)=e^{-x}(xe^x-e^x+c)$$

da cui
$$y(x)=x-1+ce^{-x}.$$

OSSERVAZIONE

Tra le infinite soluzioni si possono selezionare quelle che soddisfano ulteriori condizioni.

Imporre la condizione $y(x_0)=y_0$ dove (x_0,y_0) è un punto assegnato significa risolvere il PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'(x)+a(x)y(x)=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Tornando all'esempio precedente con soluzione generale

$$y(x) = x - 1 + ce^{-x}$$

risolviamo i seguenti problemi di Cauchy

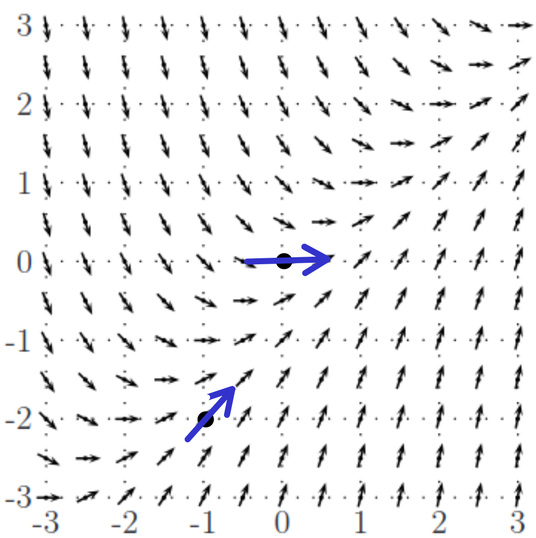
$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(-1) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$-2 = y(-1) = -1 - 1 + ce^{1} \qquad 0 = y(0) = 0 - 1 + ce^{0}$$

$$\Rightarrow c = 0 \quad \boxed{y(x) = x - 1} \qquad \Rightarrow c = 1 \quad \boxed{y(x) = x - 1 + e^{-x}}$$

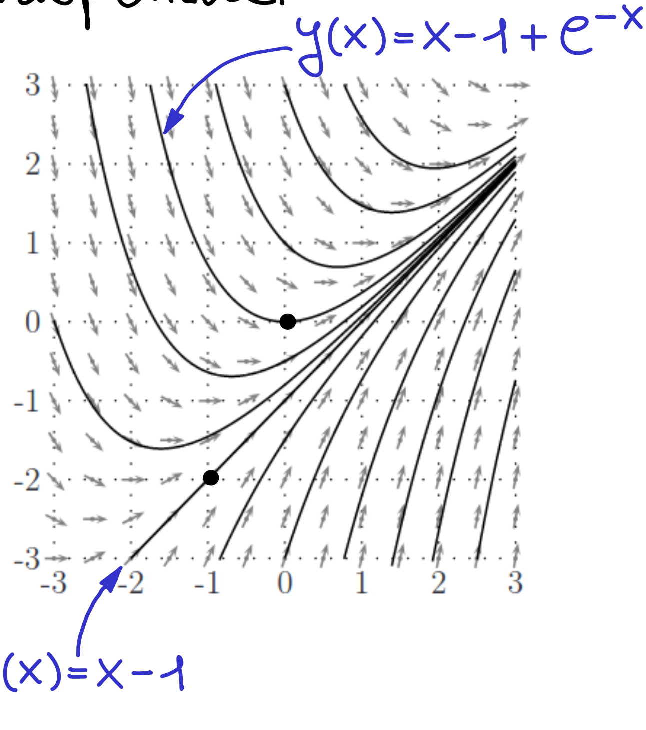
Si noti che se una soluzione di $y'(x) + y(x) = x$ passa per (x_0, y_0) allora $y'(x_0) = x_0 - y_0$ ossia è nota l'inclinazione della retta tangente al grafico di $y(x)$ in quel punto.

Così variando (x_0, y_0) otteniamo un "campo di direzioni" che le soluzioni dell'equazione differenziale dovranno rispettare.



In $(-1,-2)$: $y' = -1 - (-2) = 1$

In $(0,0)$: $y' = 0 - 0 = 0$



ESEMPI

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{e^x+1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

Calcolo di una primitiva di $a(x) = -\dfrac{1}{e^x+1}$:

$$A(x) = -\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right) dt$$

$t = e^x,\ \log(t) = x$

$\dfrac{dt}{t} = dx$

$$= \log|t+1| - \log|t|$$

$$= \log\left|1 + \frac{1}{t}\right| = \log(1+e^{-x}).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = 1 + e^{-x}.$$

Quindi

$$\int e^{A(x)} \cdot f(x)\,dx = \int (1+e^{-x})e^x\,dx = \int (e^x+1)\,dx$$

$$= e^x + x + c$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)} \cdot f(x)\,dx\right) = \frac{e^x+x+c}{1+e^{-x}}.$$

Infine imponiamo la condizione $y(0) = -1$:

$$-1 = y(0) = \frac{e^0+0+c}{1+e^{-0}} = \frac{1+c}{2} \Rightarrow c = -3.$$

Così la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x+x-3}{1+e^{-x}}.$$

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 4x^2 \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Una primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$ è $A(x) = \log|x|$.
Allora il fattore integrante in $(-\infty, 0)$ è

$$e^{A(x)} = e^{\log|x|} = |x| = -x.$$

Quindi

$$\int e^{A(x)} \cdot f(x)\,dx = \int (-x) \cdot 4x^2\,dx = -\int 4x^3\,dx = -x^4 + c$$

e la soluzione generale in $(-\infty, 0)$ è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} \cdot f(x)\,dx \right) = -\frac{1}{x}(-x^4 + c) = x^3 - \frac{c}{x}.$$

Infine imponiamo la condizione $y(-1) = -2$:

$$-2 = y(-1) = (-1)^3 - \frac{c}{(-1)} = -1 + c \Rightarrow c = -1.$$

Così la soluzione cercata è

$$y(x) = x^3 + \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$