ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 28

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $a_k \geq 0$ definitivamente e $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$.

1) Se $L<1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.
2) Se $L>1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $a_k > 0$ definitivamente e $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$.

1) Se $L<1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.
2) Se $L>1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

OSSERVAZIONE

Se il limite $L=1$ allora i criteri della radice e del rapporto sono inconcludenti.

Infatti se $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ allora

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1})^\alpha} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{k!}$ converge? Sì

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^\alpha}{\underbrace{\cancel{(k+1)}!}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^\alpha} = \frac{1}{k+1} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha \longrightarrow 0$$

$0<1$ e quindi la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2}$ converge? Sì

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2/k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)^k \longrightarrow e^{-1}$$

$e^{-1}<1$ e quindi la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k^3+\log(k))\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3^k}\right)$ converge? Sì

Notiamo che per $k\to\infty$ $\quad$ $\mathrm{sen}(x)\sim x$ per $x\to 0$

$$0<(k^3+\log(k))\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{1}{3^k}\right) \sim \frac{k^3}{3^k}$$

$$k^3\left(1+\frac{\log(k)}{k^3}\right)\sim k^3$$

Quindi per confronto asintotico basta studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k}$.

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{(k^{1/k})^3}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}<1$ e quindi la serie converge.

OSSERVAZIONE

Il caso in cui il termine della serie a_k cambi segno infinite volte è in generale più difficile da analizzare. Si dimostra che

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \overset{(*)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

ESEMPIO

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sia $a_k = \dfrac{x^k}{k!}$, allora per $k \to \infty$,

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$$

così per il criterio del rapporto $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge e per $(*)$ anche la serie data converge.

OSSERVAZIONE

Si dimostra che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \operatorname{sen}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \cos(x)$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DI LEIBNIZ)

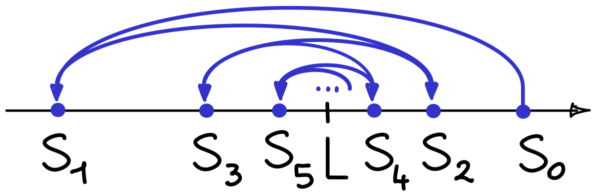
Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Se $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall k \geq 0$ e $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ è convergente.

dim. Per la decrescenza e il limite a 0, $a_k \geq 0$.
Consideriamo la somma parziale $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ e dimostriamo che $S_n \to L \in \mathbb{R}$.

$S_1 = S_0 - a_1$

$S_3 = S_2 - a_3$

$S_5 = S_4 - a_5$



$S_0 = a_0$

$S_2 = S_1 + a_2$

$S_4 = S_3 + a_4$

Verifichiamo che S_{2n} decresce e S_{2n-1} cresce

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (\overbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}^{\leq 0}) \leq S_{2n}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (\underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0}) \geq S_{2n-1}$$

Inoltre $S_{2n}, S_{2n-1} \in [S_1, S_0]$ (limitatezza)

$$S_1 \leq S_{2n-1} = S_{2n} - \overbrace{a_{2n}}^{\geq 0} \leq S_{2n} \leq S_0.$$

Quindi per la monotonia e la limitatezza i limiti esistono e sono finiti

$$S_{2n} \to L_0 \quad \text{e} \quad S_{2n-1} \to L_1.$$

Infine

$$L_0 - L_1 = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \Rightarrow L_0 = L_1 \overset{d}{=} L.$$

Si conclude così che $\lim_{n\to\infty} S_n = L$. $\square$

$\{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n-1}\}$

OSSERVAZIONE

Il criterio di Leibniz vale anche se l'ipotesi di decrescenza è verificata definitivamente:

$$\exists N \geq 0 : a_K \geq a_{K+1} \ \forall K \geq N.$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $\displaystyle\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K^\alpha}$ è convergente $\forall \alpha > 0$.

Si nota che per $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{K^\alpha}$ è decrescente per $K \geq 1$ e

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K^\alpha} = 0.$$

Allora la serie converge per il criterio di Leibniz.

OSSERVAZIONE

Si dimostra che $\forall x \in (-1, 1]$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}}{K} x^K = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \log(1+x).$$