ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 26

ESEMPI

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}}\,dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+, $1^\pm$ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-(\overbrace{e^{-x}}^{\sim 1-x})}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1-(1-x)}{x^a \cdot 1} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

convergenza per $a-1<1$ ossia $a<2$

Per $x \to 1^\pm$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1-e^{-1}}{1\cdot|x-1|^{4a}} = \frac{c}{|x-1|^{4a}}$$

convergenza per $4a<1$ ossia $a<\frac{1}{4}$

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a|x|^{4a}} = \frac{1}{x^{5a}}$$

per $5a>1$ ossia $a>\frac{1}{5}$

Quindi l'integrale in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\begin{cases} a<2 \\ a<\frac{1}{4} \\ a>\frac{1}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{5}<a<\frac{1}{4}}$$

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ è convergente?}$$

L'unico punto da indagare è $+\infty$.
Notiamo che per $t \to 0$
$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow \operatorname{sen}(t) - t \sim -\frac{t^3}{6}.$$
Così per $x \to +\infty$
$$\frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\frac{1}{6^a}\cdot\frac{1}{x^{3a}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{C}{x^{3a+\frac{1}{3}}}$$
e l'integrale in $[1,+\infty)$ è convergente se $3a+\frac{1}{3}>1$ ossia se $a>\frac{2}{9}$.

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a}\,dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,
$$\frac{e^{(a-3)x}}{(\underbrace{1-e^{-x}}_{\sim x})(\underbrace{\log(2+\tfrac{1}{x})}_{\sim \log(\frac{1}{x}) = -\log(x) = |\log(x)|})^a} \sim \frac{1}{x|\log(x)|^a}$$
convergenza per $a>1$

Per $x \to +\infty$,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})(\log(2+\frac{1}{x}))^a} \sim \frac{e^{(a-3)x}}{1\cdot(\log(2))^a}$$

convergenza per $a-3<0$ ossia $a<3$

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\boxed{1<a<3}$$

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)}\,dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{\overbrace{(1+x^a)^{1/4}}^{\sim 1+\frac{1}{4}x^a}-1}{\underbrace{\log(e^{x^2}+x^3)}_{\log(1+x^2+o(x^2)+x^3)\sim\log(1+x^2)\sim x^2}\log^2(x+2)} \sim \frac{\cancel{1}+\frac{1}{4}x^a-\cancel{1}}{x^2\cdot\log^2(2)} = \frac{c}{x^{2-a}}$$

convergenza per $2-a<1$ ossia $a>1$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\underbrace{\log(e^{x^2}+x^3)}_{\sim\log(e^{x^2})=x^2}\log^2(x+2)} \sim \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^2\log^2(x)} = \frac{1}{x^{2-\frac{a}{4}}\log^2(x)}$$

convergenza per $2-\frac{a}{4}\underbrace{\geq}_{\beta=2>1}1$ ossia $a\leq 4$.

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\boxed{1<a\leq 4}$$

ESEMPI

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$t=\sqrt{x},\ t^2=x$

$2t\,dt=dx$

$\sqrt{0}=0, \sqrt{+\infty}=+\infty$

$$\overset{\curvearrowright}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(1+t^2)}=2\Big[\operatorname{arctg}(t)\Big]_0^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi.$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}dx.$$

$$=\int_1^{+\infty}\operatorname{arctg}(x)\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x}\,d(\operatorname{arctg}(x))$$

$$=0+\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log(x)-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}-\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\log(2)}{2}.$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{2} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}}\,dx.$$

$$t=\sqrt{2-x}$$
$$x=2-t^2$$
$$2t\,dt=-dx$$

$$= \int_{2}^{0} \frac{\log(4-t^2)}{\cancel{t}}(-2\cancel{t}\,dt)$$

$$= 2\int_{0}^{2} \log(\overbrace{4-t^2}^{(2-t)(2+t)})\,dt$$

$$= \underbrace{2\int_{0}^{2} \log(\overbrace{2-t}^{s=2-t})\,dt}_{\text{improprio}} + \underbrace{2\int_{0}^{2} \log(\overbrace{2+t}^{s=2+t})\,dt}_{\text{non improprio}}$$

$$= 2\int_{0}^{2} \log(s)\,ds + 2\int_{2}^{4} \log(s)\,ds$$

$$= 2\int_{0}^{4} \log(s)\,ds$$

$$= 2\Big[x\log(x)-x\Big]_{0^+}^{4}$$

$$= 2(4\log(4)-4) - 2\overbrace{\lim_{x\to 0^+}(x\log(x)-x)}^{=0}$$

$$= 16\log(2)-8.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}\int_2^x \frac{1}{\log(t)}\,dt$$

Notiamo che se $F(x)=\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\log(t)}\,dt$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\log(t)}\,dt \underset{\alpha=0,\ \beta=1}{=} +\infty \quad e \quad F'(x)=\frac{1}{\log(x)}$$

inoltre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log(x)}=+\infty$.

Quindi per il limite dato possiamo applicare de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\frac{x}{\log(x)}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{\frac{\log(x)-\cancel{x}\cdot 1/\cancel{x}}{\log^2(x)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log(x)}\cdot\frac{\log^2(x)}{\log(x)-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2(x)}{\log^2(x)-1}=1.$$