ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 18

ESEMPI

- Calcolare T_5 di $tg(x)$ in $x_0=0$.

Invece di fare il calcolo diretto determiniamo T_5 utilizzando gli sviluppi noti di $sin(x)$ e $cos(x)$:

$$tg(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\cdot\Big(1\underbrace{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}_{=t\to 0}\Big)^{-1}$$

$$(1+t)^{-1}=1-t+t^2+o(t^2)$$

$$=(\cdots)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2+o((x^2)^2)\right)$$

$$=(\cdots)\Big(1-\overbrace{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}^{t}+\overbrace{\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)}^{t^2}+o(x^4)\Big)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$=x+x^3\underbrace{\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1+3}{6}=\frac{1}{3}}+x^5\underbrace{\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6\cdot 2}+\frac{5}{24}\right)}_{\frac{1-10+25}{120}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}}+o(x^5)$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

Per l'unicità di T_5 segue che

$$T_5(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}.$$

- Calcolare T_3 di $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{sen}(2x)+e^{-x}}$ in $x_0=0$.

Abbiamo che
$$\sqrt{1-x^2}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right).$$
Inoltre
$$(\operatorname{sen}(2x)+e^{-x})^{-1}$$
$$=\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)+1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+o(x^3)\right)^{-1}$$
$$=\Big(1+\underbrace{x+\frac{x^2}{2}-\frac{3x^3}{2}+o(x^3)}_{=t\to 0}\Big)^{-1}$$
$$(1+t)^{-1}=1-t+t^2-t^3+o(t^3)$$
$$=1-\overbrace{\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{3x^3}{2}+o(x^3)\right)}^{t}+\overbrace{\left(x^2+x^3+o(x^3)\right)}^{t^2}-\overbrace{\left(x^3+o(x^3)\right)}^{t^3}$$
$$=1-x+x^2\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}_{\frac{1}{2}}+x^3\left(\frac{3}{2}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)+o(x^3).$$
Così per l'unicità di T_3 segue che
$$\sqrt{1-x^2}\cdot(\operatorname{sen}(2x)+e^{-x})^{-1}$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\cdot\left(1-x+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^3}{2}+o(x^3)\right)$$
$$=1-x+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$
$$=1-x+2x^3+o(x^3).$$
Quindi
$$T_3(x)=1-x+2x^3.$$

• Tracciare il grafico di $f(x)=(x-3)e^{\operatorname{arctg}(x)}$.

f è continua nel dominio $D=\mathbb{R}$.

Segno di f: $\quad - - - - - - - \ \underset{3}{\bullet} \ + + + + + +$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-3)e^{\operatorname{arctg}(x)}=\pm\infty$$

Asintoto per $x\to+\infty$,

$$\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{se } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$f(x)=(x-3)e^{\operatorname{arctg}(x)}=(x-3)e^{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}(x-3)e^{-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{\pi}{2}}(x-3)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}\left(x-3-1+\frac{3}{x}+o(1)\right)=e^{\frac{\pi}{2}}(x-4)+o(1).$$

Quindi l'asintoto per $x\to+\infty$ è $y=e^{\frac{\pi}{2}}(x-4)$.

In modo simile si trova che l'asintoto per $x\to-\infty$ è $y=e^{-\frac{\pi}{2}}(x-4)$.

Derivata prima: per $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=e^{\operatorname{arctg}(x)}+(x-3)e^{\operatorname{arctg}(x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=e^{\operatorname{arctg}(x)}\frac{x^2+x-2}{1+x^2} \leftarrow (x-1)(x+2)$$

f': $\quad + + + + \ \underset{-2}{\bullet} \ - - - \ \underset{1}{\bullet} \ + + + +$

-2: max rel

1: min rel

Derivata seconda: per $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2} \cdot \frac{x^2+x-2}{1+x^2} + e^{\operatorname{arctg}(x)} \frac{(2x+1)(1+x^2)-(x^2+x-2)2x}{(1+x^2)^2}$$

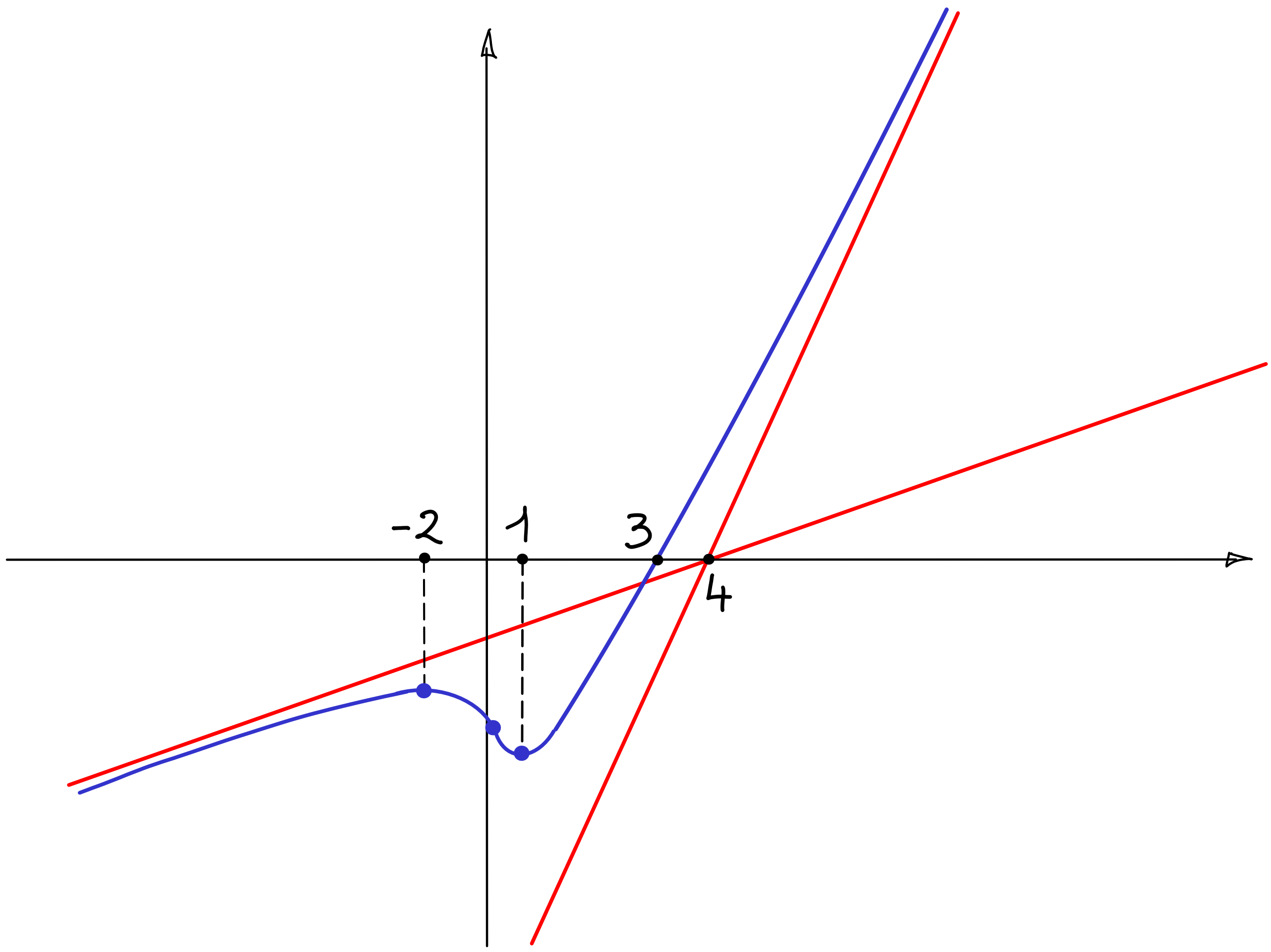
$$2x+1+\cancel{2x^3}+x^2-\cancel{2x^3}-2x^2+4x$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{(1+x^2)^2} \cdot (\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}+6x+1)$$

$$7x-1$$

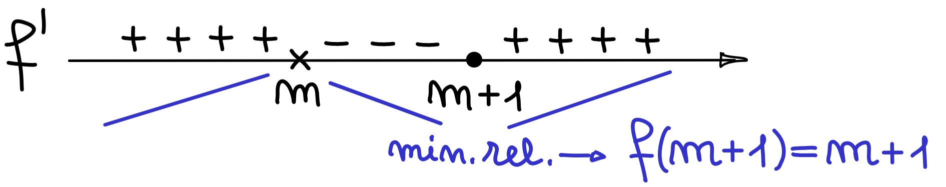
f'': $- - - - - - - -$ per $x < \frac{1}{7}$, $+ + + + + +$ per $x > \frac{1}{7}$

$\frac{1}{7}$ flesso



• Determinare il numero di soluzioni di
$$x=\log(|x-m|)$$
al variare di $m\in\mathbb{R}$.

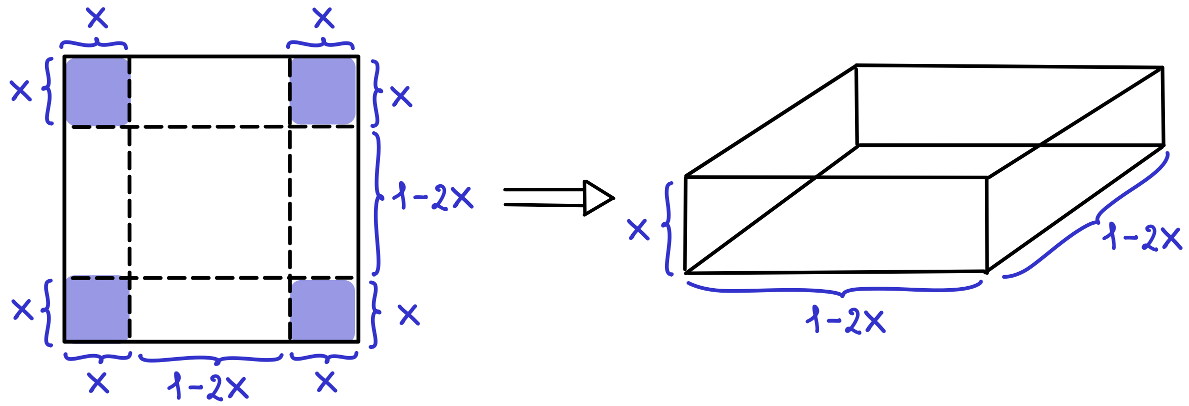
Consideriamo la funzione
$$f(x)=x-\log(|x-m|)$$
f è continua in $(-\infty,m)\cup(m,+\infty)$. Inoltre
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to m^{\pm}} f(x)=+\infty$$
Derivata prima: per $x\neq m$
$$f'(x)=1-\frac{1}{|x-m|}\cdot\overset{\pm 1}{\left(\frac{|x-m|}{x-m}\right)}=1-\frac{1}{x-m}=\frac{x-(m+1)}{x-m}$$



1) f è strett. crescente in $(-\infty,m)$ e $f((-\infty,m))=\mathbb{R}$

2) f è strett. decrescente in $(m,m+1]$ e
$$f((m,m+1])=[f(m+1),+\infty)=[m+1,+\infty)$$
3) f è strett. crescente in $[m+1,+\infty)$ e
$$f([m+1,+\infty))=[f(m+1),+\infty)=[m+1,+\infty)$$
Quindi $x=\log(|x-m|)$ ossia $f(x)=0$ ha
$$\begin{cases} 3 \text{ soluzioni se } m<-1 \\ 2 \text{ soluzioni se } m=-1 \\ 1 \text{ soluzione se } m>-1 \end{cases}$$

• Per costruire una scatola senza coperchio si ritagliano 4 quadrati uguali dagli angoli di un quadrato di lato 1.



Qual è la scatola di volume massimo?

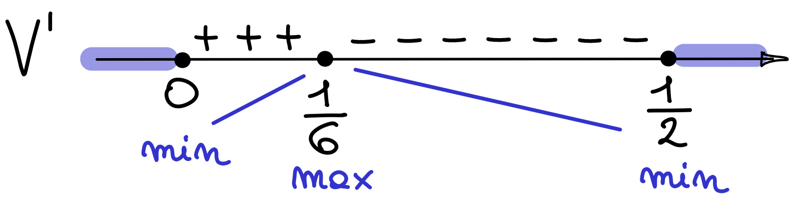
Il lato x dei quadrati da tagliare può variare nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ in modo che $1-2x \geq 0$.

Il volume della scatola è

$$V(x) = (1-2x)^2 \cdot x.$$

Dato che

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2(1-2x)\cdot(-2)x + (1-2x)^2 \\ &= (1-2x)\cdot(-4x+1-2x) \\ &= (1-2x)\cdot(1-6x) \end{aligned}$$



Quindi la scatola di volume massimo ha dimensioni $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$ e $V_{max} = V(\frac{1}{6}) = \frac{2}{27}$.

Si noti che $V(0) = V(\frac{1}{2}) = 0$.