

**Analisi Matematica**  
**Foglio di esercizi n. 12**  
**SOLUZIONI**

**Esercizio 1.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

Il dominio è  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Dato che  $f(x) = |g(x)|$ , consideriamo anche la funzione  $g(x) = (x - 3)e^{1/(2-x)}$ . Per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ha che

$$g(x) = (x - 3)(1 + 1/(2 - x) + o(1/x)) = x - 3 - 1 + o(1) = x - 4 + o(1).$$

Quindi la funzione  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$  ha un asintoto obliquo  $y = x - 4$  e per  $x \rightarrow -\infty$  ha un asintoto obliquo  $y = -x + 4$ . Inoltre  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ .

Per  $x \neq 2$ , la derivata prima di  $g$  è

$$g'(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{x^2 - 3x + 1}{(x - 2)^2}.$$

Notiamo  $g' = f'$  per  $x > 3$  e  $g' = -f'$  per  $x < 3$ . Il punto  $x = 3$  è un punto angoloso per la funzione  $f$ :

$$f'_-(3) = -g'(3) = -1/e \quad \text{e} \quad f'_+(3) = g'(3) = 1/e.$$

Si noti che  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 0$ .

Inoltre si ha che  $f$  è crescente in  $[(3 - \sqrt{5})/2, 2)$ , in  $(2, (3 + \sqrt{5})/2]$  e in  $[3, +\infty)$ . La funzione  $f$  è decrescente in  $(-\infty, (3 - \sqrt{5})/2]$  e in  $[(3 + \sqrt{5})/2, 3]$ . Il punto  $x = (3 + \sqrt{5})/2 \in (2, 3)$  è di massimo relativo, mentre il punto  $x = (3 - \sqrt{5})/2 \in (0, 1)$  è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo assoluto mentre  $x = 3$  è un punto di minimo assoluto con  $f(3) = 0$ .

Per  $x \neq 2$ , la derivata seconda di  $g$  è

$$g''(x) = e^{1/(2-x)} \cdot \frac{3x - 7}{(x - 2)^4}.$$

Quindi  $f$  è convessa in  $(-\infty, 2)$ , in  $(2, 7/3]$  e in  $[3, +\infty)$ , ed è concava in  $(7/3, 3]$ . Il punto  $x = 7/3 \approx 2.333$  è l'unico punto di flesso.

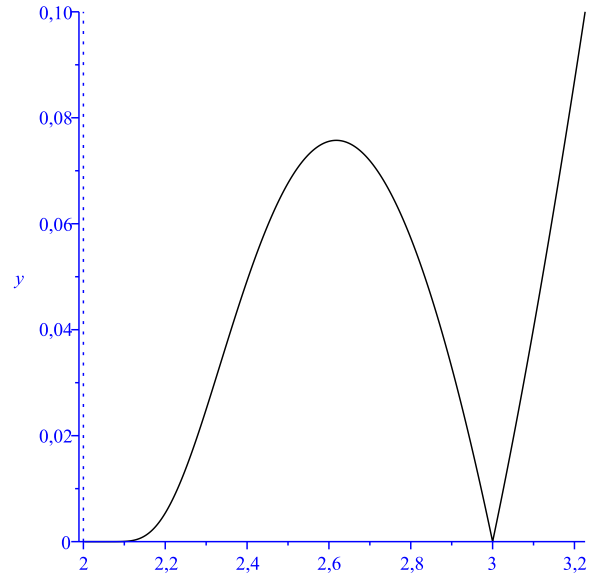


Grafico di  $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$  in  $[2, 3.2]$

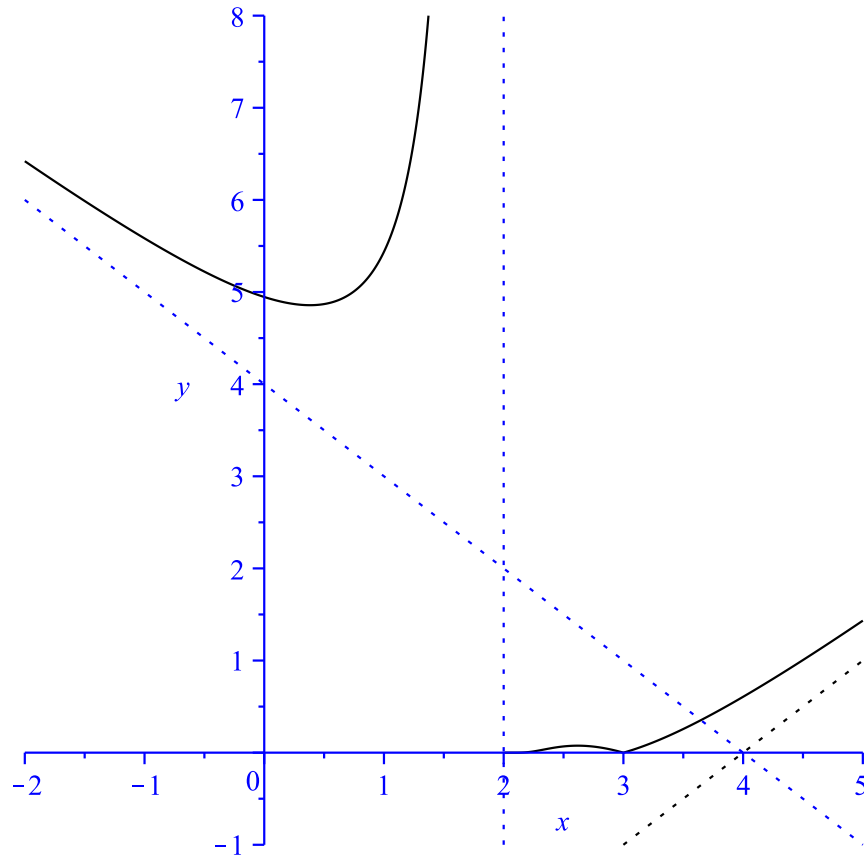


Grafico di  $f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$

**Esercizio 2.** Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} \arcsin(2x - 1) dx.$$

Integrando per parti, e poi effettuando la sostituzione  $t = \sqrt{1-x}$ , si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} \arcsin(2x - 1) dx &= \int_0^1 \arcsin(2x - 1) d\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} [\arcsin(2x - 1)x^{3/2}]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} dx \\ &= \frac{2}{3} (\arcsin(1) - 0) - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{4x(1-x)}} dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_1^0 \frac{1-t^2}{t} (-2t dt) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3} \int_0^1 (1-t^2) dt \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3} \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx.$$

Calcolare l'integrale per  $\alpha = 1/2$ .

Nell'intervallo  $(1, +\infty)$  i punti da indagare sono due:  $1^+$  e  $+\infty$ .

Per  $x \rightarrow 1^+$ ,  $t = x - 1 \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\log(1+t) - \log(t)}{t^\alpha} \sim -\frac{\log(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha |\log(t)|^{-1}}.$$

Quindi, per la convergenza,  $\alpha < 1$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cdot -\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Per la convergenza,  $\alpha + 1 > 1$  ossia  $\alpha > 0$ .

Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se  $0 < \alpha < 1$ .

Ora calcoliamo l'integrale per  $\alpha = 1/2$ . Ponendo  $s = \sqrt{x-1}$  e  $dx = 2s ds$ , si ha che

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} \log\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) (2s ds) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \log(1+s^{-2}) ds \\ &= 2 [s \log(1+s^{-2})]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} s \cdot \frac{(-2s^{-3})}{1+s^{-2}} ds \\ &= 0 + 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds \\ &= 4 [\arctan(s)]_{0^+}^{+\infty} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi. \end{aligned}$$

Si noti che  $\lim_{s \rightarrow 0^+} s \log(1+s^{-2}) = 0$  e  $\lim_{s \rightarrow +\infty} s \log(1+s^{-2}) = 0$ .

**Esercizio 4.a.** Risolvere il seguente problema di Cauchy per  $x \in (0, +\infty)$ ,

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2 \arctan(x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di  $a(x) = 1/x$  per  $x > 0$  è

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \log(x).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x) dx &= \int 2x \arctan(x) dx = \int \arctan(x) d(x^2) \\ &= x^2 \arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= x^2 \arctan(x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x) + c \\ &= (x^2 + 1) \arctan(x) - x + c \end{aligned}$$

e la soluzione generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = \frac{1}{x} ((x^2 + 1) \arctan(x) - x + c) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \arctan(x) - 1 + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

Infine imponiamo la condizione  $y(1) = -1$ :

$$y(1) = \frac{\pi}{2} - 1 + c = -1$$

da cui si ricava che  $c = -\frac{\pi}{2}$ . Quindi la soluzione cercata in  $(0, +\infty)$  è

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \arctan(x) - 1 - \frac{\pi}{2x}.$$

**Esercizio 4.b.** Risolvere il seguente problema di Cauchy per  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} (1+x^4)y'(x) = -4x^3y(x) + 3x^2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine e per identificare correttamente la funzione  $a(x)$  dobbiamo prima risistemare i termini

$$y'(x) + \frac{4x^3}{1+x^4}y(x) = \frac{3x^2}{1+x^4}.$$

Allora  $a(x) = 4x^3/(1+x^4)$  e una sua primitiva è

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{1+x^4} d(x^4) = \log(1+x^4)$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(1+x^4)} = 1+x^4.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = \int (1+x^4) \cdot \frac{3x^2}{1+x^4} dx = \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = \frac{x^3 + c}{1+x^4}.$$

Ora imponiamo la condizione  $y(0) = 5$ :

$$y(0) = c = 5.$$

Quindi la soluzione cercata in  $\mathbb{R}$  è

$$y(x) = \frac{x^3 + 5}{x^4 + 1}.$$

**Esercizio 5.a.** Risolvere

$$(z + 3)^3 = 64.$$

Risolviamo prima l'equazione  $w^3 = 64$  dove  $w = z + 3$  ossia determiniamo le radici terze complesse di 64. Dato che  $64 = 2^6 e^{i0}$  le radici terze sono

$$w_k = 2^{6/3} e^{i(2k\pi)/3} \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

ossia

$$w_0 = 4e^{i0/3} = 4, \quad w_1 = 4e^{i2\pi/3} = -2 + 2\sqrt{3}i, \quad w_2 = 4e^{i4\pi/3} = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:

$$z_0 = w_0 - 3 = 1, \quad z_1 = w_1 - 3 = -5 + 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = w_2 - 3 = -5 - 2\sqrt{3}i.$$

**Esercizio 5.b.** Risolvere

$$(z^4 + 16)(z^2 - 2z + 3 - 2i\sqrt{3}) = 0.$$

Il primo fattore si annulla se e solo se  $z$  è una radice quarta di  $-16 = 2^4 e^{i\pi}$  ossia  $z_k = 2e^{i(\pi+2k\pi)/4}$ , con  $k = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1 + i), & z_1 &= 2e^{3i\pi/4} = \sqrt{2}(-1 + i), \\ z_2 &= 2e^{5i\pi/4} = \sqrt{2}(-1 - i), & z_3 &= 2e^{7i\pi/4} = \sqrt{2}(1 - i). \end{aligned}$$

Per il secondo fattore risolviamo l'equazione di secondo grado

$$z^2 - 2z + 3 - 2i\sqrt{3} = 0.$$

Abbiamo che

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3 - 2i\sqrt{3}) = -8 + 8i\sqrt{3} = 16e^{i2\pi/3}$$

le cui radici quadrate sono

$$4e^{i\pi/3} = 4(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{e} \quad -4e^{i\pi/3} = -2 - 2i\sqrt{3}.$$

Così le due soluzioni dell'equazione di secondo grado sono

$$z_4 = \frac{2 + (2 + 2i\sqrt{3})}{2} = 2 + i\sqrt{3}, \quad z_5 = \frac{2 - (2 + 2i\sqrt{3})}{2} = -i\sqrt{3}.$$

Quindi le soluzioni complesse dell'equazione data sono sei:  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ .

**Esercizio 6.a.** Per  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ , determinare il gradiente nel punto  $(3, -1)$  e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto  $(3, -1, f(3, -1))$ .

Abbiamo che

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

da cui il gradiente in  $(3, -1)$  è uguale a

$$\nabla f(3, -1) = (f_x(3, -1), f_y(3, -1)) = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right).$$

Così il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(3, -1, f(3, -1))$  è

$$z = f(3, -1) + f_x(3, -1)(x-3) + f_y(3, -1)(y+2)$$
$$= 2 - \frac{1}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(y+2) = 2 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{2}.$$

**Esercizio 6.b.** Per  $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - 2y^2}$ , determinare il gradiente nel punto  $(-1, 2)$  e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto  $(-1, 2, f(-1, 2))$ .

Abbiamo che

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{25 - x^2 - 2y^2} \right) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - 2y^2}}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{25 - x^2 - 2y^2} \right) = -\frac{2y}{\sqrt{25 - x^2 - 2y^2}}$$

da cui il gradiente in  $(-1, 2)$  è uguale a

$$\nabla f(-1, 2) = (f_x(-1, 2), f_y(-1, 2)) = \left( \frac{1}{4}, -1 \right).$$

Così il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(-1, 2, f(-1, 2))$  è

$$z = f(-1, 2) + f_x(-1, 2)(x+1) + f_y(-1, 2)(y-2)$$
$$= 4 + \frac{1}{4}(x+1) - (y-2) = \frac{25}{4} + \frac{x}{4} - y.$$

**Esercizio 6.c.** Per  $f(x, y) = 2 \arctan(y/x)$ , determinare il gradiente nel punto  $(1, 1)$  e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

Abbiamo che

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2 \arctan(y/x)) = \frac{-2y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2 \arctan(y/x)) = \frac{2/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

da cui il gradiente in  $(1, 1)$  è uguale a

$$\nabla f(1, 1) = (f_x(1, 1), f_y(1, 1)) = (-1, 1).$$

Così il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 1, f(1, 1))$  è

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$$
$$= \frac{\pi}{2} - (x - 1) + (y - 1) = \frac{\pi}{2} - x + y.$$

**Esercizio 6.d.** Per  $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{y}$ , determinare il gradiente nel punto  $(\pi, 1)$  e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto  $(\pi, 1, f(\pi, 1))$ .

Abbiamo che

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin(xy^2)}{y} \right) = \frac{y^2 \cos(xy^2)}{y} = y \cos(xy^2)$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sin(xy^2)}{y} \right) = \frac{\cos(xy^2)(2xy)y - \sin(xy^2)}{y^2} = 2x \cos(xy^2) - \frac{\sin(xy^2)}{y^2}$$

da cui il gradiente in  $(\pi, 1)$  è uguale a

$$\nabla f(\pi, 1) = (f_x(\pi, 1), f_y(\pi, 1)) = (-1, -2\pi).$$

Così il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(\pi, 1, f(\pi, 1))$  è

$$z = f(\pi, 1) + f_x(\pi, 1)(x - \pi) + f_y(\pi, 1)(y - 1)$$
$$= 0 - (x - \pi) - 2\pi(y - 1) = 3\pi - x - 2\pi y.$$

**Esercizio 7.a.** Trovare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = y^2e^x - x^2 + x$  e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (y^2e^x - x^2 + x) = y^2e^x - 2x + 1 \\f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (y^2e^x - x^2 + x) = 2ye^x.\end{aligned}$$

I punti critici si ottengono risolvendo  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0)$  ossia

$$\begin{cases} y^2e^x - 2x + 1 = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases}, \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \end{cases}$$

e quindi c'è un solo punto critico:  $(1/2, 0)$ .

Inoltre le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= y^2e^x - 2 \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 2ye^x \\f_{yy}(x, y) &= 2e^x.\end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$  nel punto critico:

$$H_f(1/2, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{e} \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det(H_f(1/2, 0)) = -4\sqrt{e} < 0$  allora  $(1/2, 0)$  è un punto di sella.

**Esercizio 7.b.** Trovare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3$  e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3) = 2x - 4y \\f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3) = -4x + 6y + 3y^2.\end{aligned}$$

I punti critici si ottengono risolvendo  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0)$  ossia

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2y \\ -4(2y) + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2y \\ y(3y - 2) = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono:  $(0, 0)$  e  $(4/3, 2/3)$ .

Inoltre le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= 2 \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -4 \\f_{yy}(x, y) &= 6 + 6y.\end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$  nei punti critici:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_f(4/3, 2/3) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det(H_f(0, 0)) = 12 - (-4)^2 = -4 < 0$  allora  $(0, 0)$  è un punto di sella.

Dato che  $\det(H_f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})) = 20 - (-4)^2 = 4 > 0$  e  $f_{xx}(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = 2 > 0$  allora  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$  è un punto di minimo relativo.

**Esercizio 7.c.** Trovare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = xy(1 - x - y)$  e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy(1 - x - y)) = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) \\f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(xy(1 - x - y)) = x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y).\end{aligned}$$

I punti critici si ottengono risolvendo  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0)$  ossia

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(1 - x) = 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x(3x - 1) = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1/3, 1/3)$ .

Inoltre le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= -2y \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 1 - 2x - 2y \\f_{yy}(x, y) &= -2x.\end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$  nei punti critici:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad H_f(0, 1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det(H_f(0, 0)) = -1 < 0$  allora  $(0, 0)$  è un punto di sella.

Dato che  $\det(H_f(1, 0)) = -1 < 0$  allora  $(1, 0)$  è un punto di sella.

Dato che  $\det(H_f(0, 1)) = -1 < 0$  allora  $(0, 1)$  è un punto di sella.

Dato che  $\det(H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = \frac{1}{3} > 0$  e  $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} < 0$  allora  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  è un punto di massimo relativo.

**Esercizio 7.d.** Trovare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y$  e studiarne la natura.

Abbiamo che per  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y \right) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y} \\f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y \right) = -\frac{x}{y^2} + 2.\end{aligned}$$

I punti critici si ottengono risolvendo  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0)$  ossia

$$\begin{cases} -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 4y = x^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} 4y = 4y^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

e quindi c'è un solo punto critico:  $(2, 1)$ .

Inoltre le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= \frac{8}{x^3} \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -\frac{1}{y^2} \\f_{yy}(x, y) &= \frac{2x}{y^3}.\end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$  nel punto critico:

$$H_f(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det(H_f(2, 1)) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(2, 1) = 1 > 0$  allora  $(2, 1)$  è un punto di minimo relativo.