Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 11
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\int_0^{\pi} \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx.$$

Dop aver separato l'integrale poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt - \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \\ &= 2\Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 = 4.\end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\, dx.$$

Ricordando che $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, poniamo $t = \sin^2(x)$, allora $dt = 2\sin(x)\cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\log^2(\sin^2(x))\, dx &= \int_0^{1/2} \log^2(t)\, dt \\ &= \Big[t\log^2(t)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t\, d(\log^2(t)) \\ &= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\int_0^{1/2} \log(t)\, dt \\ &= \frac{\log^2(2)}{2} - 2\Big[t\log(t) - t\Big]_0^{1/2} \\ &= \frac{\log^2(2)}{2} + \log(2) + 1.\end{aligned}$$

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2 - x)}{x^3}\, dx.$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int \frac{\log(x^2-x)}{x^3}\, dx = \int \log(x^2-x)\, d(-\frac{1}{2x^2}) = -\frac{\log(x^2-x)}{2x^2} + \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2(x^2-x)}\, dx.$$

La funzione razionale da integrare si decompone come

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2(x^2-x)} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

dove si trova che

$$D = \lim_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{2}}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad C = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Ponendo $x = 1/2$ e $x = -1$, otteniamo altre due equazioni, rispettivamente $2A + 4B = -3$ e $-A + B = 0$ da cui otteniamo $A = B = -1/2$. Dunque

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2(x^2-x)}\,dx = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x}\right| + c.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2-x)}{x^3} &= \Big[-\frac{\log(x^2-x)}{2x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x}\right) \Big]_1^{+\infty} \\
&= 0 - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{\log(x^2-x)}{x^2} + \log\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) + 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{\log(x-1)}{x^2} + \log(x-1)\right) - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x^2-1)\log(x-1)}{x^2}\right) - \frac{1}{4} \\
&= 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(\arctan(e^x) - \arctan(e^{-x}))\,dx.$$

Posto $t = e^{-x}$ si ha che $x = -\log(t)$, $dx = -dt/t$ e integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}(\arctan(e^x) - \arctan(e^{-x}))\,dx &= \int_1^0 t(\arctan(1/t) - \arctan(t))\,(-dt/t) \\
&= \int_0^1 (\arctan(1/t) - \arctan(t))\,dt \\
&= [(\arctan(1/t) - \arctan(t))t]_{0^+}^1 \\
&\qquad - \int_0^1 \left(\frac{-1/t^2}{1+(1/t)^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) t\,dt \\
&= 0 + \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt \\
&= \Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1 = \log(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)}.$$

Nell'intervallo $(1, +\infty)$, i punti da indagare sono due: 1^+ e $+\infty$.
Per $x \to 1^+$, $t = x - 1 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\log^3(1+t)}{t^a \log^5(2)} \sim \frac{t^3}{t^a \log^5(2)} \sim \frac{1}{\log^5(2)} \cdot \frac{1}{t^{a-3}}.$$

Così, per la convergenza, $a - 3 < 1$ ossia $a < 4$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\log^3(x)}{x^a \log^5(x^x)} = \frac{\log^3(x)}{x^a \cdot x^5 \log^5(x)} = \frac{1}{x^{a+5} \log^2(x)}.$$

Quindi, per la convergenza, $a + 5 \geq 1$ ossia $a \geq -4$ (si noti che l'esponente del logaritmo è $2 > 1$).
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $-4 \leq a < 4$.

Esercizio 2.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)}.$$

Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da controllare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^8}{x^a (x^3)^2} = \frac{1}{x^{a-2}}.$$

Quindi, per la convergenza, $a - 2 < 1$ ossia $a < 3$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^a \log^2(x^3)} \sim \frac{\pi/2}{9} \cdot \frac{1}{x^a \log^2(x)}.$$

Così, per la convergenza, $a \geq 1$.

L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $1 \leq a < 3$.

Esercizio 2.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^a}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^a}$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$, c'è solo un punto da controllare ossia 0^+ (si noti che per $x \to (\pi/2)^-$, $f(x) \to 1$).
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{x^2}{2})^3)^a} \sim \frac{x^2}{(1-(1-\frac{3x^2}{2}))^a} = \frac{1}{(3/2)^a} \cdot \frac{x^2}{x^{2a}} = \frac{1}{(3/2)^a} \cdot \frac{1}{x^{2a-2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $2a-2 < 1$ e l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 3/2$.

Esercizio 2.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x)\,\sqrt{\cos(x)}}.$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+ e in $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{(2x)^a} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{x^{a-1/2}}.$$

Quindi, per l'integrabilità, $a - 1/2 < 1$, ossia $a < 3/2$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, $t = \pi/2 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{\pi/4}{\sin^a(\pi-2t)\,\sqrt{\sin(t)}} \sim \frac{\pi/4}{\sin^a(2t)\,t^{1/2}} \sim \frac{\pi/4}{2^a} \cdot \frac{1}{t^{a+1/2}}.$$

Per l'integrabilità, $a + 1/2 < 1$, ossia $a < 1/2$.
L'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 1/2$.

Esercizio 3.a. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^2+3k) - 2\log(k)}{(\log(\sqrt{k}+1))^{3a}}$$

al variare del parametro $a > 0$.

Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\log(k^2+3k) - 2\log(k)}{(\log(\sqrt{k}+1))^{3a}} &= \frac{\log(1+3/k)}{(\frac{1}{2}\log(k) + \log(1+1/\sqrt{k}))^{3a}} \\ &\sim \frac{3/k}{(\frac{1}{2}\log(k))^{3a}} = \frac{C}{k\log^{3a}(k)}. \end{aligned}$$

Così, per il confronto asintotico, la serie converge se e solo se $3a > 1$ ($\alpha = 1$, $\beta = 3a$) ossia se $a > 1/3$.

Esercizio 3.b. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1}$$

al variare del parametro $a > 0$.

Per $k \to \infty$,

$$\frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1} \sim \frac{4^k a^{2k}}{3^k} = \left(\frac{4a^2}{3}\right)^k.$$

Allora, per il confronto asintotico, la serie data converge se e solo se la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty}(4a^2/3)^k$ è convergente ossia se $|4a^2/3| < 1$, da cui $|a| < \sqrt{3}/2$.

Esercizio 4.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 2$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{2x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int e^{2x}\,3e^{-2x}\,dx = \int 3\,dx = 3x + c.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\,f(x)\,dx = e^{-2x}\,(3x + c)\,.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 1$:

$$y(0) = c = 1.$$

Così la soluzione cercata in $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = e^{-2x}\,(3x + 1)\,.$$

Esercizio 4.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 2x$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^2}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int e^{x^2}\,xe^{-x^2}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = e^{-1}$:

$$y(1) = e^{-1}\left(\frac{1}{2} + c\right) = e^{-1}$$

da cui si ricava che $c = 1/2$. Quindi la soluzione cercata in $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = \frac{x^2 + 1}{2e^{x^2}}.$$

Esercizio 4.c. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-2, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x+2} = 3e^x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Una primitiva di $a(x) = 1/(x+2)$ per $x > -2$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x+2}\, dx = \log(x+2).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(x+2)} = x + 2.$$

Quindi integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx &= \int (x+2)\, 3e^x\, dx = 3 \int (x+2)\, d(e^x) \\ &= 3(x+2)e^x - 3\int e^x\, dx = 3(x+1)e^x + c \end{aligned}$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \frac{3(x+1)e^x + c}{x+2}$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 2$:

$$y(0) = \frac{3 + c}{2} = 2$$

da cui si ricava che $c = 1$. Quindi la soluzione cercata in $(-2, +\infty)$ è

$$y(x) = \frac{3(x+1)e^x + 1}{x+2}.$$

Esercizio 4.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x) y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = \tan(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$A(x) = \int \tan(x)\, dx = -\int \frac{1}{\cos(x)}\, d(\cos(x)) = -\log|\cos(x)| = -\log(\cos(x)).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{-\log(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + c$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \cos(x)\ (\tan(x) + c) = \sin(x) + c\, \cos(x).$$

Infine imponiamo la condizione $y(0) = 4$:

$$y(0) = c = 4$$

e la soluzione cercata in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è

$$y(x) = \sin(x) + 4\cos(x).$$

Esercizio 5.a. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(3+i)z = 2-4i.$$

Abbiamo che

$$z = \frac{2-4i}{3+i} = \frac{(2-4i)(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{6-12i-2i+4i^2}{3^2+1^2} = \frac{2-14i}{10} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Esercizio 5.b. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$(2-i)\overline{z} - 5 = (1+2i)^3.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{5+(1+2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+3\cdot 2i+3\cdot(2i)^2+(2i)^3}{2-i} = \frac{5+1+6i-12-8i}{2-i} \\ &= \frac{-6-2i}{2-i} = -2\frac{(3+i)(2+i)}{|2-i|^2} = -2\frac{6+2i+3i+i^2}{4+1} = -2\frac{5+5i}{5} = -2-2i.\end{aligned}$$

Quindi $z = \overline{(\overline{z})} = -2+2i$.

Esercizio 5.c. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$2z(z+1) = -|3-4i|.$$

Abbiamo che l'equazione si scrive come

$$0 = 2z(z+1) + |3-4i| = 2z^2+2z+\sqrt{3^2+(-4)^2} = 2z^2+2z+5$$

Così, $\Delta = (2)^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = -36 < 0$ e quindi le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2+6i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i.$$

Esercizio 5.d. Risolvere

$$z^2(z^2+13) = -36.$$

L'equazione data è equivalente a

$$z^4+13z^2+36 = 0.$$

Poniamo $w = z^2$ e risolvendo $w^2+13w+36=0$ troviamo $\Delta = 13^2-4\cdot 36 = 25$ e

$$w_1 = \frac{-13+5}{2} = -4 \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{-13-5}{2} = -9.$$

Così rimangono da risolvere $z^2=-4$ e $z^2=-9$ da cui le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = 3i, \quad z_4 = -3i.$$

Esercizio 5.e. Risolvere
$$||z| - 3i|^2 = 4.$$

Dato che $|z|$ è un numero reale e $-3i$ è un numero immaginario allora
$$||z| - 3i|^2 = |z|^2 + (-3)^2 = |z|^2 + 9.$$

Così l'equazione diventa $|z|^2 + 9 = 4$, ossia $|z|^2 = -5$ che non ha soluzioni visto che $|z|^2 \geq 0$.

Esercizio 5.f. Risolvere
$$(1 + i)^2((z + 4i)^2 - i) = 6.$$

Dato che $(1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, quindi
$$(z + 4i)^2 = i + \frac{6}{2i} = i - 3i = -2i.$$

Siccome le radici quadrate di $-2i = 2e^{3\pi i/2}$ sono
$$\pm\sqrt{2}e^{3\pi i/4} = \pm\sqrt{2}(\cos(3\pi i/4) + i \sin(3\pi i/4)) = \pm(-1 + i),$$

allora le soluzioni complesse dell'equazione data sono due
$$-4i + (-1 + i) = -1 - 3i \quad \text{e} \quad -4i - (-1 + i) = 1 - 5i.$$