

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 11

1. Calcolare i seguenti integrali definiti.

a. $\int_0^\pi \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{\sin(x)}} dx$

b. $\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \log^2(\sin^2(x)) dx$

c. $\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2 - x)}{x^3} dx$

d. $\int_0^{+\infty} e^{-x} (\arctan(e^x) - \arctan(e^{-x})) dx$

2. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

a. $\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)} dx$

b. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)} dx$

c. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^3(x))^a} dx$

d. $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x) \sqrt{\cos(x)}} dx$

3. Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $a > 0$.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^2 + 3k) - 2 \log(k)}{(\log(\sqrt{k} + 1))^{3a}}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1}$

4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy nell'intervallo assegnato.

a.
$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 per $x \in \mathbb{R}$

b.
$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$
 per $x \in \mathbb{R}$

c.
$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x+2} = 3e^x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$
 per $x \in (-2, +\infty)$

d.
$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$
 per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

5. Risolvere le seguenti equazioni in \mathbb{C} .

a. $(3+i)z = 2-4i$

b. $(2-i)\bar{z} - 5 = (1+2i)^3$

c. $2z(z+1) = -|3-4i|$

d. $z^2(z^2+13) = -36$

e. $||z| - 3i|^2 = 4$

f. $(1+i)^2((z+4i)^2 - i) = 6$