

Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 9
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} + \frac{1}{\log(x^2 + \cos(2x))} \right).$$

Abbiamo che per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} + \frac{1}{\log(x^2 + \cos(2x))} &= \frac{1}{x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)} + \frac{1}{\log(1 - x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4))} \\ &= \frac{1}{x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)} + \frac{1}{-x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{1}{2}(-x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4)} \\ &= \frac{1}{x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)} + \frac{1}{-x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)} \\ &= \frac{-x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) + \left(x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)}{(x^2 + o(x^2))(-x^2 + o(x^2))} \\ &= \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} \rightarrow -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \log(1 + x^2)} \int_0^x t \sin(2t) e^{3t} dt.$$

Sia

$$F(x) = \int_0^x t \sin(2t) e^{3t} dt$$

allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile e $F'(x) = x \sin(2x) e^{3x}$. Inoltre, dato che $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$, il limite è della forma $0/0$ e applicando de L'Hopital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \sin(2t) e^{3t} dt}{x \log(1 + x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x \log(1 + x^2)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{(x \log(1 + x^2))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x) e^{3x}}{\log(1 + x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x + o(x))(1 + o(1))}{x^2 + o(x^2) + 2x^2(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 + \log |x^2 - 3|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ e la funzione è pari. Per $|x| \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = x^2(1 + o(1))$$

e quindi non ci sono asintoti per $x \rightarrow \pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} (x^2 + \log |x^2 - 3|) = -\infty.$$

Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata prima è

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{2x(x^2 - 2)}{x^2 - 3}.$$

Quindi f è crescente in $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$, in $[0, \sqrt{2}]$ e in $(\sqrt{3}, +\infty)$ mentre è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$, in $[-\sqrt{2}, 0]$ e in $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$. I punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo o di massimo assoluto.

Per $x \neq \pm\sqrt{3}$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2 - 3)^2}.$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -\sqrt{6}]$, in $[-1, 1]$ e in $[\sqrt{6}, +\infty)$ mentre è concava in $[-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$, in $(-\sqrt{3}, -1]$, in $[1, \sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, \sqrt{6}]$. I punti $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono dei flessi.

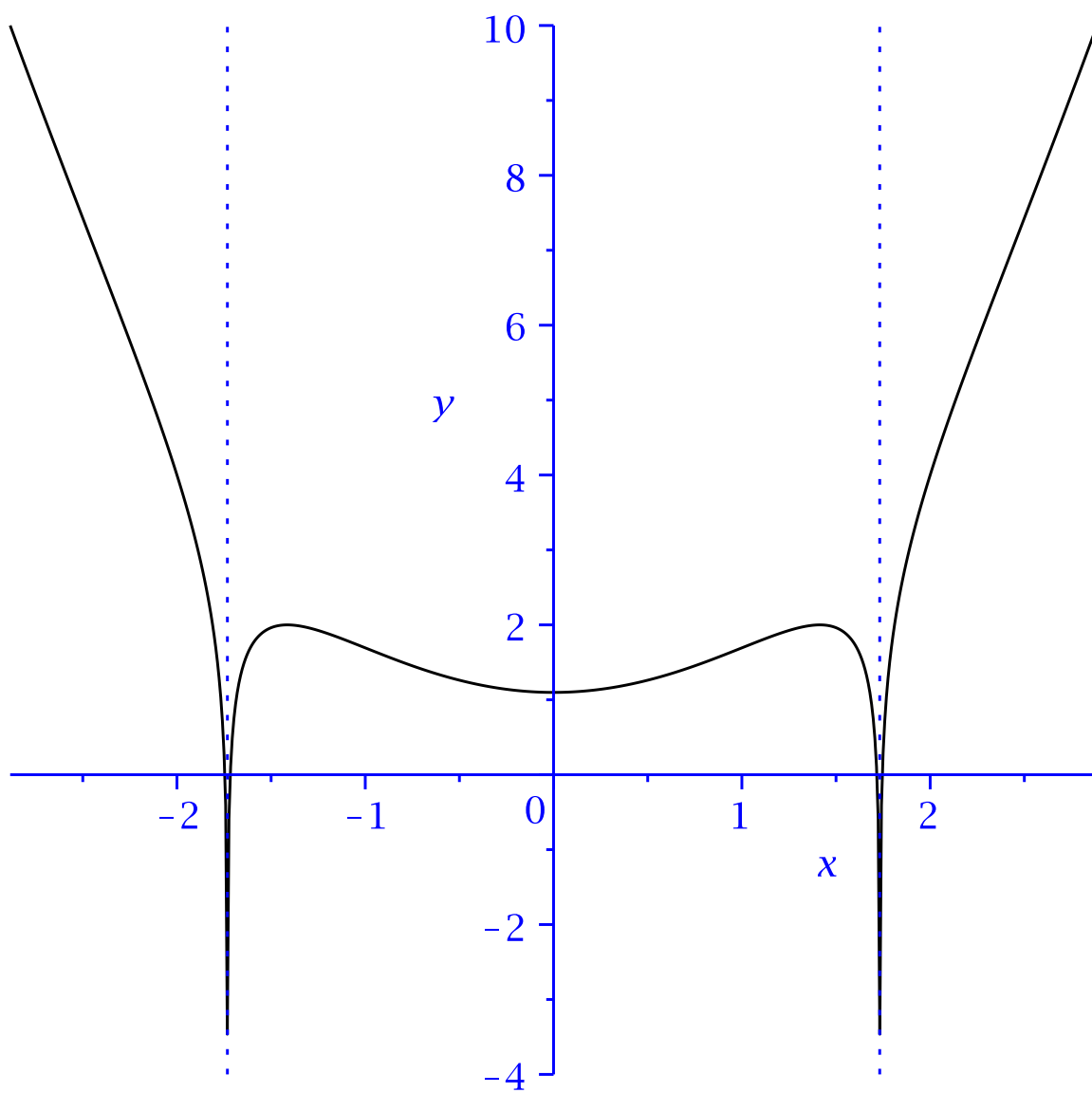


Grafico di $f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$

Esercizio 3.a. Calcolare

$$\int \frac{x^4 + 1}{(x-1)^2(x+1)} dx.$$

Effettuando la divisione otteniamo

$$\frac{x^4 + 1}{(x-1)^2(x+1)} = x + 1 + \frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Inoltre la funzione razionale rimanente può essere scritta come combinazione lineare di funzioni razionali semplici:

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Moltiplicando a sinistra e a destra per $(x-1)^2$ e calcolando il limite per $x \rightarrow 1$ otteniamo

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{(x+1)} = 1.$$

Analogamente moltiplicando a sinistra e a destra per $(x+1)$ e calcolando il limite per $x \rightarrow -1$ otteniamo

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Così

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1/2}{x+1}$$

e sostituendo ad esempio $x = 0$ otteniamo che $A = 3/2$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{(x-1)^2(x+1)} dx &= \int \left(x + 1 + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log|x+1| + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.b. Calcolare

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx.$$

Posto $t = e^x$, allora $x = \log(t)$ e $dx = dt/t$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{t + 1}{t(t^2 + 1)} dt = \int \left(\frac{t + 1}{t(t^2 + 1)} \right) dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \ln|t| + \arctan(t) - \frac{\log(1 + t^2)}{2} + c \\ &= x + \arctan(e^x) - \frac{\log(1 + e^{2x})}{2} + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)} dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, allora $t^2 = x$, $2t dt = dx$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)} dx &= \int \frac{2t}{t(t^2-9)} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \log \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + c \\ &= \frac{1}{3} \log \left(\frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}+3} \right) + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \\ &= x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c. \end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Calcolare

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx.$$

Posto $t = \sqrt{x}$, si ha che $t^2 = x$ e $2t dt = dx$. Quindi

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^t (2t dt) = 2 \int_0^2 e^t (t - 1) dt = 2 \left[e^t (t - 1) \right]_0^2 = 2(e^2 + 1).$$

Esercizio 4.b. Calcolare

$$\int_1^4 (|x - 2| - x) \log(x) dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_1^4 (|x - 2| - x) \log(x) dx &= \int_1^2 ((2 - x) - x) \log(x) dx + \int_2^4 ((x - 2) - x) \log(x) dx \\ &= 2 \int_1^2 \log(x) dx - \int_1^2 2x \log(x) dx - 2 \int_2^4 \log(x) dx \\ &= 2 \left[x \log(x) - x \right]_1^2 - \left[x^2 \log(x) - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - 2 \left[x \log(x) - x \right]_2^4 \\ &= 2(2 \log(2) - 1) - \left(4 \log(2) - \frac{3}{2} \right) - 2(4 \log(4) - 2 - 2 \log(2)) \\ &= \frac{7}{2} - 12 \log(2) \end{aligned}$$

perché

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - \int x(1/x) dx = x \log(x) - x + c$$

e

$$\begin{aligned} \int 2x \log(x) dx &= \int \log(x) d(x^2) = x^2 \log(x) - \int x^2 d(\log(x)) \\ &= x^2 \log(x) - \int x^2 (1/x) dx = x^2 \log(x) - \frac{x^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Calcolare

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{3}x - 1)^2 \arctan |x| dx.$$

Dopo aver svolto il quadrato notiamo che la funzione dispari $2\sqrt{3}x \arctan |x|$ può essere tolta perché il suo integrale in $[-1, 1]$ vale zero,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\sqrt{3}x - 1)^2 \arctan |x| dx &= \int_{-1}^1 (3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) \arctan |x| dx \\ &= 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) \arctan(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \arctan(x) d(x^3 + x) \\ &= 2 \left[\arctan(x)(x^3 + x) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^2} dx \\ &= \pi - 2 \int_0^1 x dx = \pi - \left[x^2 \right]_0^1 = \pi - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \log(1 + e^x) dx.$$

Sia $t = e^x$, allora $\log(t) = x$, $dt/t = dx$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \log(1 + e^x) dx &= \int_{-\infty}^0 e^x \log(1 + e^x) dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} \log(1 + e^x) dx \\ &= \int_0^1 \log(1 + t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + t)}{t^2} dt \\ &= [(1 + t) \log(1 + t) - t]_0^1 + \int_1^{+\infty} \log(1 + t) d(-1/t) \\ &= 2 \log(2) - 1 + \left[-\frac{\log(1 + t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t + 1)} dt \\ &= 3 \log(2) - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= 3 \log(2) - 1 + \left[\log \left(\frac{t}{t + 1} \right) \right]_1^{+\infty} = 4 \log(2) - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4.e. Calcolare

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx.$$

Sia $t = \sqrt{e^{2x} - 1}$, allora $\log(1 + t^2) = 2x$, $2tdt/(1 + t^2) = 2dx$ e

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 4.f. Calcolare

$$\int_0^1 x \log \left(\frac{x}{2-x} \right) dx.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log \left(\frac{x}{2-x} \right) dx &= \int_0^1 \log \left(\frac{x}{2-x} \right) d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \log \left(\frac{x}{2-x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2-x}{x} \cdot \frac{2}{(2-x)^2} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) dx \\ &= \left[x + 2 \log |x-2| \right]_0^1 = 1 - 2 \log(2). \end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}.$$

Nell'intervallo $(0, 2]$, f è positiva e il punto da indagare è 0^+ . Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^a}.$$

e dunque la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a < 1$.

Esercizio 5.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a}.$$

Nell'intervallo $[1, +\infty)$, f è positiva e il punto da indagare è $+\infty$. Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo che

$$f(x) \sim \frac{1/\sqrt[3]{x}}{x^a} = \frac{1}{x^{a+1/3}}.$$

e dunque la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a + 1/3 > 1$, ossia per $a > 2/3$.

Esercizio 5.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}$$

Nell'intervallo $(0, 4]$, f è positiva e il punto da indagare è 0^+ . Per $x \rightarrow 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^a}{2x} \sim \frac{1/2}{x^{1-a}}.$$

Quindi la convergenza dell'integrale improprio si ha per $1 - a < 1$, ossia per $a > 0$.

Esercizio 5.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}$$

Nell'intervallo $[2, +\infty)$, f è positiva e il punto da indagare è $+\infty$. Per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{e^{ax}}{e^x} = e^{(a-1)x}.$$

Così la convergenza dell'integrale improprio si ha per $a - 1 < 0$ ossia $a < 1$.

Esercizio 5.e. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a}.$$

Si noti che $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ e f è positiva in $(1, +\infty)$.

Dunque i punti da indagare sono due: 1 e $+\infty$. Per $x \rightarrow 1$,

$$f(x) \sim \frac{3(x-1)^2}{4^a(x-1)^a} = \frac{C}{(x-1)^{a-2}}.$$

Quindi, per la convergenza è necessario che $a - 2 < 1$ ossia $a < 3$. Per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{x^3}{x^{4a+1}} = \frac{1}{x^{4a-2}}.$$

Così, per la convergenza, $4a - 2 > 1$ ossia $a > \frac{3}{4}$.

Imponendo le due condizioni, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\frac{3}{4} < a < 3$.

Esercizio 5.f. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log(x)|^a} dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log(x)|^a}.$$

f è positiva in $(1, +\infty)$ in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ e dunque i punti da indagare sono tre: 0^+ , 1 e $+\infty$.
Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-1}}{x^{1/3} |\log(x)|^a}.$$

Dato che $1/3 < 1$, la condizione di convergenza in un intorno di 0^+ è soddisfatta per ogni a .
Per $x \rightarrow 1$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log(1 + (x-1))|^a} \sim \frac{1 - e^{-1/2}}{|x-1|^a}.$$

Così la condizione di convergenza in un intorno di 1 è soddisfatta per $a < 1$.
Per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1/(x^2+1)}{x^{1/3} |\log(x)|^a} = \frac{1}{x^{7/3} |\log(x)|^a}.$$

Dato che $7/3 > 1$ la condizione di convergenza è soddisfatta per ogni a .
Quindi l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a < 1$.

Esercizio 6.a. Determinare $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che la funzione $f(x) = \sin(ax) + b$ soddisfi le seguenti condizioni: la media integrale di f in $[-1, 1]$ vale 4 e l'equazione $f(x) = 4$ ha almeno due soluzioni in $(-1, 1)$.

La media integrale di f su $[-1, 1]$ è

$$\frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(ax) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 b dx = 0 + b = b \implies b = 4.$$

L'equazione $f(x) = 4$ è dunque equivalente a $\sin(ax) = 0$ e così le soluzioni in $(-1, 1)$ sono almeno due non appena $a > \pi$. In tale caso $x = 0$ e $x = \pi/a$ e $x = -\pi/a$ sono soluzioni di $f(x) = 4$.

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una funzione f integrabile in $[-1, 1]$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ ha un punto angoloso in 0

Basta prendere una funzione integrabile che abbia un punto di discontinuità di salto in $x = 0$. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ha le proprietà richieste. Infatti f è integrabile in $[-1, 1]$ e per $x \in [-1, 0)$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x 0 dt = 0$$

e per $x \in [0, 1]$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 0 dt + \int_0^x 1 dt = 0 + [t]_0^x = x.$$

Dunque

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0), \\ x & \text{se } x \in [0, 1], \end{cases}$$

che ha un punto angoloso in 0: $F'_+(0) = 1$ e $F'_-(0) = 0$.