

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 1

1. Risolvere le seguenti disuguaglianze.

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} < 0$

b. $\frac{x(x+1)^2}{x^2-16} \leq \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-24}$

c. $x-3 > \sqrt{2x^2-10x-12}$

d. $\sqrt{2-\sqrt{2+x}} \geq x$

e. $\frac{|x|-x}{2x^2-1} \geq -2$

f. $2 \log_4(|x|) \leq \log_2(2-3x) + 1$

g. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \sin^2(x) \leq \frac{1}{4}$

h. $\frac{2 \cos(2x) - \cos^2(x)}{1 + \sin^2(x)} \leq 1$

2. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni.

a. $f(x) = |\sqrt{|x-3|} - 1|$

b. $f(x) = 1 + \sin(-|x-\pi|)$

c. $f(x) = \frac{1}{||x|-2|} - \frac{1}{2}$

d. $f(x) = \arctan(|\tan(x)|)$

3. Determinare il dominio D delle seguenti funzioni.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{|x^2-4|}$

b. $f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2}\right)$

c. $f(x) = \frac{\log_2(|\sin(2^x)|)}{|x-2|}$

d. $f(x) = \frac{\tan(x/2)}{1-\cos(4x)}$

e. $f(x) = \sqrt{1-|x-1|+|x-3|}$

f. $f(x) = \arccos(x - \sqrt{x^2-3x})$

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni f determinare il dominio D e l'insieme immagine $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$. Verificare se $f : D \rightarrow f(D)$ sia invertibile e nel caso determinare la funzione inversa f^{-1} .

a. $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

b. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

c. $f(x) = \frac{2}{3 + \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$

5. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti proposizioni:

a. $\forall n \geq 7, n! > 3^n$

b. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$