

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 7/7/2026

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{2x^3(e^{1/x} - 1)}{x + 5}$.

a) Calcolare l'asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$.

b) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{2x + 6}{1 + \log(x + 2) - \log(x)} \right)$.

a) Per $x \rightarrow +\infty$,

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{-1} = 1 - \frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = 2x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 - \frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \left(2x + 1 + o(1)\right)\left(1 - \frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x + 1 - 10 + o(1) = 2x - 9 + o(1). \end{aligned}$$

Così l'asintoto richiesto è $y = 2x - 9$.

b) Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{2x + 6}{1 + \log(x + 2) - \log(x)} &= \frac{2x + 6}{1 + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2x + 6}{1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= (2x + 6)\left(1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2x + 6 - 4 + o(1) = 2x + 2 + o(1). \end{aligned}$$

Infine, per a),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{2x + 6}{1 + \log(x + 2) - \log(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 9 + o(1) - (2x + 2 + o(1))) = -11.$$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \log \left(\frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 - 2\sin(x)}} \right)$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$.

b) Trovare l'intervallo più grande che contiene 0 ed è contenuto nel dominio della funzione f .

a) Dopo aver applicato le proprietà del logaritmo, per $x \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 + 2x^2) - \frac{1}{2} \log(1 - 2\sin(x)) \\ &= 2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) \right) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2} \left(- \left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(2x + o(x^2) \right)^3 - \frac{1}{4} \left(2x + o(x^2) \right)^4 + o(x^4) \right) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2} \left(-2x + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + o(x^4) \right) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{4x^3}{3} + 2x^4 + o(x^4) \\ &= x + 3x^2 + \frac{7x^3}{6} - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Così il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$ è

$$T_4(x) = x + 3x^2 + \frac{7x^3}{6} - \frac{x^4}{3}.$$

b) Dato che $1 + 2x^2 > 0$, per il dominio basta imporre che, al denominatore, $1 - 2\sin(x)$ sia positivo, ossia

$$\sin(x) < \frac{1}{2}.$$

Quindi il dominio D è l'unione degli intervalli

$$\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right),$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Così l'intervallo più grande in D che contiene 0 è

$$\left(-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right).$$

Esercizio 3. Sia $\int_b^{+\infty} \frac{\log(x) - 1}{x(\log(x))^2(1 + \log(x))} dx$.

a) Determinare per quali $b \geq 0$ l'integrale dato è convergente.

b) Calcolare l'integrale per $b = e^2$.

a) Per $b \geq 0$, i punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ , $(1/e)^\pm$, $1^\pm$, e $+\infty$.

Cominciamo dall'estrema destra e procediamo verso sinistra.

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\log(x) - 1}{x(\log(x))^2(1 + \log(x))} \sim \frac{\log(x)}{x(\log(x))^3} = \frac{1}{x(\log(x))^2}$$

il cui integrale converge in un intorno di $+\infty$.

Per $x \rightarrow 1^+$, si ha $\log(x) \sim x - 1$ e

$$\frac{\log(x) - 1}{x(\log(x))^2(1 + \log(x))} \sim \frac{-1}{1 \cdot (x - 1)^2 \cdot 1} = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

e dunque l'integrale non converge in un intorno destro di $x = 1$.

Allora, senza esaminare gli altri punti, possiamo già concludere che l'integrale dato è convergente se e solo se $b > 1$.

b) Posto $t = \log(x)$, si ha $dt = dx/x$ e

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^{+\infty} \frac{\log(x) - 1}{x(\log(x))^2(1 + \log(x))} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{t - 1}{t^2(1 + t)} dt \\ &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{1 + t} \right) dt \\ &= \left[2 \log(t) + \frac{1}{t} - 2 \log(1 + t) \right]_2^{+\infty} \\ &= \left[2 \log \left(\frac{t}{1 + t} \right) + \frac{1}{t} \right]_2^{+\infty} \\ &= 0 - 2 \log \left(\frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} = 2 \log \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove l'equazione

$$\frac{t - 1}{t^2(1 + t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t + 1}$$

è risolta per $A = 2$, $B = -1$ e $C = -2$.

Esercizio 4. a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$|z|^2 + t \cdot i = 4z - 2.$$

ha almeno una soluzione $z \in \mathbb{C}$?

b) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\frac{1}{|z|^2} - 4 \cdot i = \frac{4}{z} - 2.$$

a) Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha che $|z|^2 = x^2 + y^2$ e l'equazione diventa

$$x^2 + y^2 + ti = 4x + 4iy - 2.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x - 2 \\ t = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 + \frac{t^2}{16} = 0 \\ y = \frac{t}{4} \end{cases}.$$

L'equazione di secondo grado ha soluzioni reali se e solo se il discriminante $\Delta \geq 0$ ossia

$$\Delta = (-4)^2 - 4\left(2 + \frac{t^2}{16}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 8 - \frac{t^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 32 \Leftrightarrow t \in [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}].$$

Se questa condizione è soddisfatta, si trovano $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi anche la soluzione $z \in \mathbb{C}$.

b) Posto $t = -4$ e $w = x + iy = 1/z$, per quanto detto in a), dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \\ y = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

da cui $w_1 = 1 - i$ e $w_2 = 3 - i$. Così le soluzioni cercate sono:

$$z_1 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1-i|^2} = \frac{1+i}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{|3-i|^2} = \frac{3+i}{10}.$$