

Analisi Matematica - CdL Informatica

Svolgimento della prova scritta del 23/6/2026

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Tracciare il grafico di $f(2 - |x|)$ per $x \in [-2, 2]$.

c) Per quali $b \in \mathbb{R}$, l'integrale $\int_1^\infty \left(f(x) - x - \frac{b}{x} \right) dx$ è convergente?

a) Dominio: data la presenza di $-1/x$ all'esponente, si ha che $x \neq 0$: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ e quindi $x = 0$ è un asintoto verticale. Per $x \rightarrow \pm\infty$, si ha che $-1/x \rightarrow 0$ e

$$f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} = (x+1)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 1 - 1 + o(1) = x + o(1)$$

e quindi $y = x$ è l'asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x \neq 0$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

che è sempre positiva in D e dunque f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$. Non ci sono punti di massimo o di minimo. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

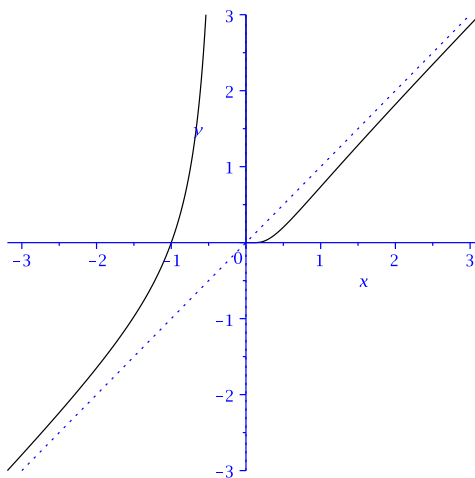


Grafico di $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$

Per $x \neq 0$,

$$f''(x) = \frac{(2x+1)x^2 - (x^2+x+1)2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Così f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1]$, mentre è concava in $[1, +\infty)$. $x = 1$ è un punto di flesso.

b) Dato che per $x \in [-2, 0]$, $f(2 - |x|) = f(2 + x)$, basta traslare di 2 verso sinistra il grafico di f nell'intervallo $[0, 2]$. Siccome $f(2 - |x|)$ è pari, per $x \in [0, 2]$ si completa il grafico usando la simmetria rispetto all'asse y .

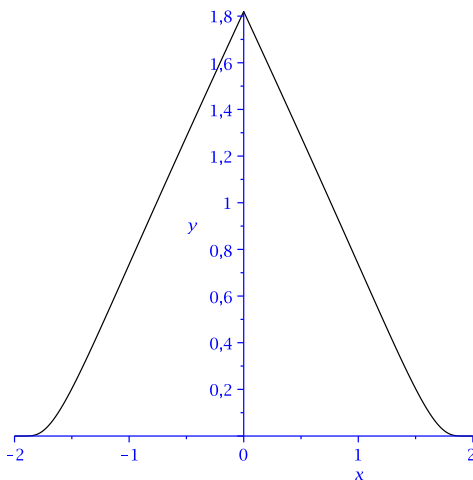


Grafico di $f(2 - |x|)$ per $x \in [-2, 2]$

c) L'unico punto da indagare per l'integrale improprio è per $x \rightarrow +\infty$.

Riprendendo lo sviluppo svolto in a) e aumentando la precisione, si ha che per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{-\frac{1}{x}} = (x+1)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= (x+1)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x + 1 - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Così per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) - x - \frac{b}{x} \sim \frac{-\frac{1}{2} - b}{x} + \frac{1}{3x^2}$$

il cui integrale in $[1, +\infty)$ converge solo se il coefficiente di $1/x$ è nullo ossia per $b = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti proposizioni.

a) La successione $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2n(n+1)}$ è decrescente per $n \geq 1$.

b) Per ogni $n \geq 1$, vale la disuguaglianza $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$.

a) Dobbiamo verificare che per $n \geq 1$, $a_n \geq a_{n+1}$, ossia $a_n - a_{n+1} \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2n(n+1)} - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{n+2-n}{2n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-n(n+2) + (n+1)^2}{n(n+1)^3(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)^3(n+2)} \geq 0. \end{aligned}$$

b) La disuguaglianza è equivalente a

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{5}{4}.$$

Dato che in a) abbiamo dimostrato che la successione $(a_n)_{n \geq 1}$ è decrescente, allora è sufficiente verificare che $a_1 \leq \frac{5}{4}$:

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2(1+1)} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

In alternativa, la disuguaglianza si può anche dimostrare per induzione.

Esercizio 3. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{cases} (x^2 - 4)y'(x) = (4 - x^2) \tan(x)y(x) + \cos(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b) Calcolare l'integrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y(x) dx$.

a) Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \tan(x) y(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 - 4}.$$

Quindi $a(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$,

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} dx = -\log |\cos(x)|$$

e così il fattore integrante per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è $e^{A(x)} = 1/\cos(x)$.

Inoltre

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + c.$$

Così la soluzione generale in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = \cos(x) \left(\frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + c \right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si trova $c = 1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \cos(x) \left(\frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + 1 \right).$$

b) Osserviamo la funzione $\log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$ è dispari:

$$\log \left| \frac{(-x) - 2}{(-x) + 2} \right| = \log \left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| = -\log \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right|.$$

Inoltre la funzione $\cos(x)$ è pari. Così

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y(x) dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx = 2 [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = \frac{1 - xy}{x + 2y - 3}$.

- a) Trovare tutti i punti critici di f .
- b) Calcolare la matrice hessiana di f nel punto $(0, 0)$.

Il dominio D di f , è dato dai punti (x, y) tali che $x + 2y - 3 \neq 0$.

In D , le derivate parziali sono uguali a

$$f_x(x, y) = \frac{-y(x + 2y - 3) - (1 - xy)}{(x + 2y - 3)^2} = \frac{-2y^2 + 3y - 1}{(x + 2y - 3)^2}$$

e

$$f_y(x, y) = \frac{-x(x + 2y - 3) - 2(1 - xy)}{(x + 2y - 3)^2} = \frac{-x^2 + 3x - 2}{(x + 2y - 3)^2}.$$

a) Per determinare i punti critici di f poniamo $\nabla f = (f_x, f_y) = (0, 0)$ e risolviamo in D il sistema

$$\begin{cases} -2y^2 + 3y - 1 = -(2y - 1)(y - 1) = 0 \\ -x^2 + 3x - 2 = -(x - 1)(x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

I punti $(1, 1)$ e $(2, \frac{1}{2})$ vanno scartati perché non appartengono a D , mentre $(1, \frac{1}{2})$ e $(2, 1)$ sono effettivamente punti critici.

b) Le derivate seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{2(2y^2 - 3y + 1)}{(x + 2y - 3)^3}, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \frac{-4y + 3}{(x + 2y - 3)^2} + \frac{4(2y^2 - 3y + 1)}{(x + 2y - 3)^3}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{4(x^2 - 3x + 2)}{(x + 2y - 3)^3}. \end{aligned}$$

Infine calcoliamo la matrice hessiana di f nel punto richiesto:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{yx}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{5}{27} & -\frac{8}{27} \end{bmatrix}.$$