

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 9/2/2026

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{|x - 2|}$.

a) Determinare il dominio D , gli intervalli di monotonia e l'insieme immagine $f(D)$.

b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_5^{+\infty} \frac{f(x) - 1}{x^a (\log(x))^2} dx$ converge?

a) Dominio: l'argomento della radice quadrata $x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ è non negativo se $x \geq 3$ o $x \leq -1$ e il denominatore $|x - 2|$ è diverso da zero se $x \neq 2$. Quindi

$$D = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).$$

Per $x > 3$, $|x - 2| = x - 2$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 2) - (x^2 - 2x - 3)}{(x - 2)^2 \sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\ &= -\frac{x - 5}{(x - 2)^2 \sqrt{x^2 - 2x - 3}} \end{aligned}$$

mentre per $x < -1$, $|x - 2| = -(x - 2)$ e

$$f'(x) = \frac{x - 5}{(x - 2)^2 \sqrt{x^2 - 2x - 3}}.$$

Studiando il segno di f' si deduce che f è strettamente crescente in $[3, 5]$, mentre è strettamente decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $[5, +\infty)$. Il valore minimo di f è $f(-1) = f(3) = 0$. Dato che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ e $f(5) = 2/\sqrt{3} > 1$, il valore massimo è $2/\sqrt{3}$. Quindi, per il teorema dei valori intermedi, l'insieme immagine della funzione continua f è

$$f(D) = \left[0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$

b) Nell'intervallo $[5, +\infty)$, c'è solo un punto da indagare: $+\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo che

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x - 2} = \frac{x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + o(1/x)}}{x(1 - \frac{2}{x})} \sim \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right) \sim 1 + \frac{1}{x}$$

e dunque

$$\frac{f(x) - 1}{x^a (\log(x))^2} \sim \frac{1/x}{x^a (\log(x))^2} = \frac{1}{x^{a+1} (\log(x))^2}.$$

Così per la convergenza deve valere la condizione $a + 1 \geq 1$, ossia $a \geq 0$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(4 \arctan \left(\frac{x+2}{x+1} \right) - \pi \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\log(e^x - x)} - \frac{2}{e^x - 1} \right)$.

a) Dopo aver riscritto il limite nella forma $0/0$, applichiamo il teorema di de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \arctan \left(\frac{x+2}{x+1} \right) - \pi}{1/x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{1 + \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2}}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{4}{2} \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

b) Per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{x}{\log(e^x - x)} = \frac{x}{\log\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \frac{x}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

Quindi, per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\log(e^x - x)} - \frac{2}{e^x - 1} &= \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} - \frac{2}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 2 \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)}{\left(\frac{x}{2} + o(x) \right) (x + o(x))} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = \frac{4 \log(x) + 8x}{(1+x)^2}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ di f in $x_0 = 1$.

b) Calcolare $\int_0^1 f(x) dx$.

a) Sia $t = x - 1$, allora

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4 \log(1+t) + 8(1+t)}{(2+t)^2} = (\log(1+t) + 2(1+t)) \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2} \\ &= \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) + 2 + 2t\right) \left(1 + (-2) \cdot \frac{t}{2} + \frac{(-2)(-3)}{2} \cdot \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right) \\ &= \left(2 + 3t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \left(1 - t + \frac{3t^2}{4} + o(t^2)\right) \\ &= 2 + (3-2)t + \left(-\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2}\right)t^2 + o(t^2) \\ &= 2 + (x-1) - 2(x-1)^2 + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

Quindi $T_2(x) = 2 + (x-1) - 2(x-1)^2$.

b) Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x) + 2x}{(1+x)^2} dx &= \int (\log(x) + 2x) d\left(-\frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{\log(x) + 2x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx \\ &= -\frac{\log(x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} + \int \left(\frac{1}{x(1+x)} + \frac{2}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{\log(x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{\log(x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} + \log(x) + (2-1)\log(1+x) + c \\ &= \frac{x \log(x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} + \log(1+x) + c. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= 4 \left[\frac{x \log(x)}{1+x} - \frac{2x}{1+x} + \log(1+x) \right]_{0^+}^1 \\ &= 4(0 - 1 + \log(2) - 0) = 4 \log(2) - 4. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia la seguente equazione in \mathbb{C} :

$$z + \frac{11 + 3i}{1 + 3i} = \frac{2 + 14i}{z + 1}.$$

a) Determinare le due soluzioni z_1 e z_2 dell'equazione in forma cartesiana.

b) Calcolare $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)$.

a) Dato che

$$\frac{11 + 3i}{1 + 3i} = \frac{(11 + 3i)(1 - 3i)}{1 + 9} = \frac{11 + 3i - 33i + 9}{1 + 9} = \frac{20 - 30i}{10} = 2 - 3i,$$

risistemando i termini si trova

$$(z + 2 - 3i)(z + 1) = 2 + 14i$$

ossia l'equazione di secondo grado

$$z^2 + (3 - 3i)z - 17i = 0.$$

Il discriminante Δ è uguale a

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (3 - 3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17i) \\ &= 9 - 18i - 9 + 68i = 50i = 50 e^{i\pi/2}.\end{aligned}$$

Allora le sue due radici quadrate sono

$$\pm 5\sqrt{2} e^{i\pi/4} = \pm 5\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \pm 5(1 + i)$$

e le due soluzioni dell'equazione in forma cartesiana sono:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 3i + 5(1 + i)}{2} = 1 + 4i$$

e

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 3i - 5(1 + i)}{2} = -4 - i.$$

b) Abbiamo che

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1 + 4i} - \frac{1}{4 + i} = \frac{1 - 4i}{1 + 16} - \frac{4 - i}{16 + 1} = \frac{-3 - 3i}{17}$$

e quindi la parte reale richiesta vale $-3/17$.