Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 4-9-2025

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = 2x^2 - x^2y^2 + y^4$.

(a) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(b) Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f in $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) $\nabla f(x,y) = (4x - 2xy^2, -2x^2y + 4y^3) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x(2-y^2)=0 \\ -2x^2y+4y^3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ 4y^3=0 \to y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ -x^2+2\cdot 2=0 \to x=\pm 2 \end{cases}$$

Punti Stazionari: $(0,0)$, $(2,\sqrt{2})$, $(-2,\sqrt{2})$, $(2,-\sqrt{2})$, $(-2,-\sqrt{2})$.

Matrice Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4-2y^2 & -4xy \\ -4xy & -2x^2+12y^2 \end{bmatrix}$.

$H_f(2,\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 0 & -8\sqrt{2} \\ -8\sqrt{2} & 16 \end{bmatrix} \to \det H_f = -128 < 0$ $\quad (2,\sqrt{2})$ è un punto di SELLA

Dato che f è sia x-pari che y-pari anche $(-2,\sqrt{2})$, $(2,-\sqrt{2})$ e $(-2,-\sqrt{2})$ sono punti di SELLA.

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \det H_f = 0 \ ?$$

Per determinare la natura di $(0,0)$ basta osservare che per ogni $(x,y) \in B_1(0,0)$, si ha che $y^2 \leq 1$ e

$$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{(2-y^2)}_{\geq 1} + \underbrace{y^4}_{\geq 0} \geq 0 = f(0,0)$$

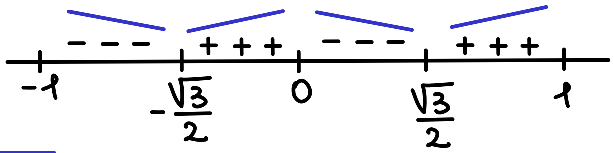
da cui $(0,0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO.

(b) Su C, $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ e quindi studiamo la restrizione

$$h(y)=f(\pm\sqrt{1-y^2},\,y)=2y^4-3y^2+2 \quad \text{con } y\in[-1,1].$$

Allora

$$h'(y)=8y^3-6y=2y(4y^2-3)$$



$$\boxed{h(\pm 1)=1\,,\ h(0)=2\,,\ h\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tfrac{7}{8}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in C è 2 e quello minimo è $\frac{7}{8}$.

Esercizio 2. Sia $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{ax^3+2y+axy^2}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e per tali valori determinare una funzione potenziale.

(b) Calcolare $\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ per $a=1$ dove γ è la curva formata dalla semicirconferenza da $(5,5)$ a $(-1,-1)$ passante da $(-1,5)$, il segmento da $(-1,-1)$ a $(1,-1)$ e dal segmento da $(1,-1)$ a $(1,1)$.

(a)
$$\vec{F} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right) + \left(0, a\frac{x\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \nabla\left(\log(x^2+y^2)\right) + (0, ax).$$

quindi $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ se e solo se $(0,ax)$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial(ax)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y} = a = 0.$$

Per $a=0$ un potenziale di $\vec{F}$ è $U(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

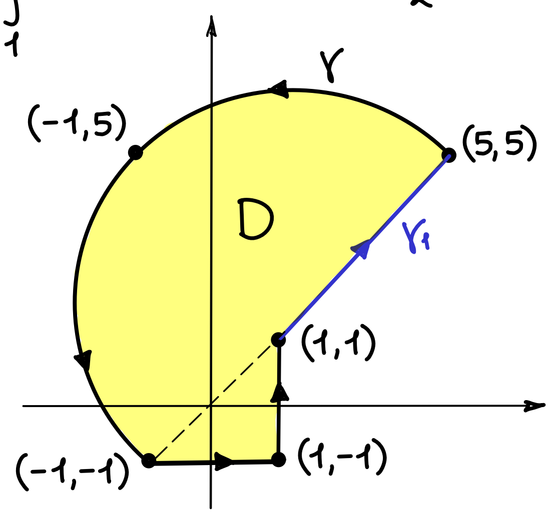
(b) Per $a=1$ abbiamo che
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = U(1,1) - U(5,5) + \int_\gamma \langle (0,x), d\vec{s}\rangle$$
$$= \log(2) - \log(50) + 9\pi - 10 = -2\log(5) + 9\pi - 10$$

dove
$$\int_\gamma \langle (0,x), d\vec{s}\rangle \overset{GG}{=} \iint_D 1\,dxdy - \int_{\gamma_1} \langle (0,x), d\vec{s}\rangle$$

$\leftarrow \vec{\gamma_1}(t) = (t,t) \quad t\in[1,5]$

$$= |D| - \int_1^5 t\,dt = 9\pi + 2 - \frac{25-1}{2} = 9\pi - 10.$$

$\underbrace{\frac{1}{2}\pi(3\sqrt{2})^2}_{\text{semi cerchio}} + \underbrace{\frac{1}{2}2\cdot 2}_{\text{triangolo}}$



Esercizio 3. Per $R > 0$ sia $D_R = \{(x, y, z) : \arctan(x^2 + y^2) \le z \le \arctan(R^2)\}$ e sia S_R la superficie ∂D_R orientata verso l'esterno.

(a) Calcolare $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \iiint_{D_R} \frac{1 + xyz}{1 + (x^2 + y^2)^2}\, dxdydz.$

(b) Fare un esempio di campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ tale che $\displaystyle\iint_{S_R} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle = 1$ per $R = 1$.

(a)
$$\iiint_{D_R \leftarrow x\text{-simm}} \frac{1+\overset{\swarrow x\text{-disp}}{x}yz}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdydz = \iiint_{D_R} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdydz$$

$$\overset{cc}{=} \int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^4}\,d\rho\, d\theta \int_{z=\operatorname{arctg}(\rho^2)}^{\operatorname{arctg}(R^2)} dz$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^4}\left(\operatorname{arctg}(R^2) - \operatorname{arctg}(\rho^2)\right) d\rho$$

$$= 2\pi \left[\operatorname{arctg}(R^2)\cdot \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\rho^2) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}(\rho^2)\right)^2\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(R^2)\right)^2 \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\pi^3}{8}$$

(b) Per il teorema della divergenza
$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iiint_{D_1} \operatorname{div}(\vec{F})\,dxdydz.$$

Per (a), se $R=1$
$$\iiint_{D_1} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdydz = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(1)\right)^2 = \frac{\pi^3}{32}.$$

Allora per avere $\displaystyle\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = 1$ basta scegliere $\vec{F}$ in modo che
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{32}{\pi^3}\cdot\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}$$
come ad esempio
$$\vec{F} = \left(0, 0, \frac{32}{\pi^3}\cdot\frac{z}{1+(x^2+y^2)^2}\right).$$

Esercizio 4. Sia $D = \{(x,y,z) : (x-z)^2 + y^2 + z^2 \le z\}$ e sia $S = \partial D$ orientata verso l'esterno.
(a) Determinare il piano tangente a S nel punto $(1,0,\frac{1}{2})$.
(b) Calcolare il flusso $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2}, \frac{y(1-xy+x^2y^2)}{1+x^2y^2}, 3yz\right)$.

(a) S è la superficie di livello

$$f(x,y,z) = (x-z)^2 + y^2 + z^2 - z = 0$$

con vettore normale

$$\nabla f(x,y,z) = (2(x-z), 2y, -2(x-z)+2z-1)$$

e dunque il piano tangente in $(1,0,\frac{1}{2})$ è

$$<\underbrace{\nabla f(1,0,\tfrac{1}{2})}_{(1,0,-1)}, (x-1, y, z-\tfrac{1}{2})> = 0.$$

ossia

$$x - z = \frac{1}{2}.$$

(b) $\vec{F} = \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2}, y - \frac{xy^2}{1+x^2y^2}, 3yz\right)$ e

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \cancel{\frac{2xy}{1+x^2y^2}} - \cancel{\frac{2x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2}} + 1 - \cancel{\frac{2xy}{1+x^2y^2}} + \cancel{\frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2}} + 3y.$$

Allora per il teorema della divergenza:

$$\iint_S <\vec{F}, d\vec{S}> = \iiint_{D \leftarrow y\text{-simm}} (1 + \underbrace{3y}_{y\text{-disp}})\,dx\,dy\,dz = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \underbrace{|S_z|}_{\pi(z-z^2)}\,dz = \pi\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Fissato z, la sezione S_z di D è data dalla disuguaglianza

$$(x-z)^2 + y^2 \le z - z^2.$$

S_z è non vuota se $z - z^2 \ge 0$ ossia per $z \in [0,1]$ e in tal caso rappresenta un cerchio di centro $(z,0)$ e raggio $\sqrt{z-z^2}$.