

Cognome:
Nome:
Orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = 2x^2 - x^2y^2 + y^4$.

(a) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(b) Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f in $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{ax^3 + 2y + axy^2}{x^2 + y^2} \right)$.

(a) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che \mathbf{F} è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e per tali valori determinare una funzione potenziale.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ per $a = 1$ dove γ è la curva formata dalla semicirconferenza da $(5, 5)$ a $(-1, -1)$ passante da $(-1, 5)$, il segmento da $(-1, -1)$ a $(1, -1)$ e dal segmento da $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

Esercizio 3. Per $R > 0$ sia $D_R = \{(x, y, z) : \arctan(x^2 + y^2) \leq z \leq \arctan(R^2)\}$ e sia S_R la superficie ∂D_R orientata verso l'esterno.

(a) Calcolare $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iiint_{D_R} \frac{1 + xyz}{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy dz$.

(b) Fare un esempio di campo vettoriale \mathbf{F} tale che $\iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 1$ per $R = 1$.

Esercizio 4. Sia $D = \{(x, y, z) : (x - z)^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ e sia $S = \partial D$ orientata verso l'esterno.

(a) Determinare il piano tangente a S nel punto $(1, 0, \frac{1}{2})$.

(b) Calcolare il flusso $\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2y}{1 + x^2y^2}, \frac{y(1 - xy + x^2y^2)}{1 + x^2y^2}, 3yz \right)$.