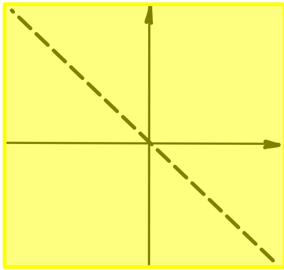
Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 20-6-2025

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}-1}{x^3+y^3}$.

(a) Determinare il dominio D di f e dimostrare che f è sempre positiva in D.

(b) Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ per ogni $(x_0,y_0) \notin D$.

(a) Dominio: $x^3+y^3 \neq 0 \Rightarrow D = \{(x,y) : x \neq -y\}$



Segno: $\forall (x,y) \in D$

$$f(x,y) = \frac{e^{x+y}-1}{x^3+y^3} = \begin{cases} \frac{+}{+} > 0 & \text{se } x+y>0 \\ \frac{-}{-} > 0 & \text{se } x+y<0 \end{cases}.$$

(b) Sia $(x_0,-x_0) \notin D$ e $(x,y) \to (x_0,-x_0)$ allora $x+y \to 0$ e

$$f(x,y) = \frac{e^{x+y}-1}{x^3+y^3} = \underbrace{\left(\frac{e^{x+y}-1}{x+y}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{(x^2-xy+y^2)}_{>0}} \to \begin{cases} \frac{1}{3x_0^2} & \text{se } x_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema: $\begin{cases} 4x^2 + yz + 8 = 3y^2 \\ x^3 + z^2 + 3 = 2y \end{cases}$.

(a) Verificare che in un intorno del punto $(1, 2, 0)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ e calcolare $\varphi'(1)$ e $\psi'(1)$.

(b) Sia C l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano il sistema. Scrivere la retta tangente a C in $(1, 2, 0)$ sia in forma parametrica che come intersezione di due piani.

(a) Il sistema dato è

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 4x^2+yz+8-3y^2=0 \\ g(x,y,z)=x^3+z^2+3-2y=0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-6y & y \\ -2 & 2z \end{bmatrix} \overset{(1,2,0)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\det}{\Longrightarrow} 4 \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite per sistemi $\exists\, y=\varphi(x)$ e $z=\psi(x)$ C^1 tali che $\varphi(1)=2$, $\psi(1)=0$ e risolvono in un intorno di $x=1$ il sistema

$$\begin{cases} 4x^2+\varphi(x)\psi(x)+8=3\varphi^2(x) \\ x^3+\psi^2(x)+3=2\varphi(x) \end{cases}.$$

Derivando rispetto a x si ha

$$\begin{cases} 8x+\varphi'\psi+\varphi\psi'=6\varphi\varphi' \\ 3x^2+2\psi\psi'=2\varphi' \end{cases} \overset{x=1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 8+2\psi'=12\varphi' \\ 3=2\varphi' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi'(1)=\frac{3}{2} \\ \psi'(1)=5 \end{cases}.$$

(b) Per (a), in un intorno di $(1,2,0)$, la curva C è data da $t \to (t,\varphi(t),\psi(t))$ con $|t-1|<r$. Quindi la retta tangente in $(1,2,0)$ in forma parametrica è

$$t \to (1,2,0)+(1,\varphi'(1),\psi'(1))\cdot t = \left(1+t, 2+\frac{3}{2}t, 5t\right).$$

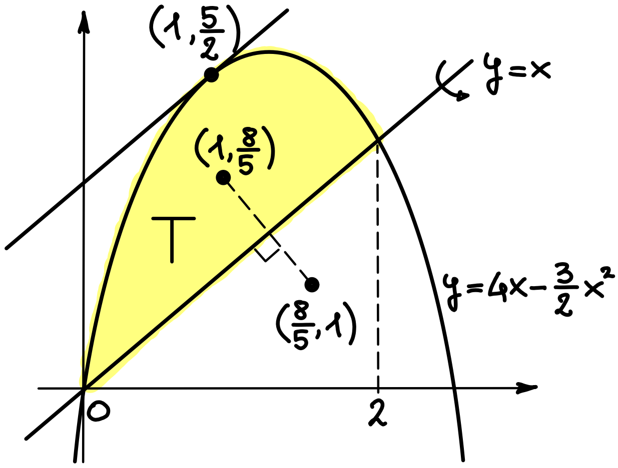
Eliminando il parametro esprimiamo la retta come intersezione di piani:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+\frac{3}{2}t \\ z=5t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=2+\frac{3}{2}(x-1) \\ z=5(x-1) \end{cases}.$$

Esercizio 3. Sia $T = \{(x, y, 0) : 2x \le 2y \le 8x - 3x^2\}$ e sia D il solido ottenuto ruotando di $360°$ l'insieme T attorno alla retta $L = \{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinare un piano tangente a D che sia parallelo a L.

(b) Calcolare il volume di D.



(a) La retta tangente a $f(x) = 4x - \frac{3}{2}x^2$ in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Tale retta è parallela a $y = x$ se $1 = f'(x_0) = 4 - 3x_0$ ossia se $x_0 = 1 \in (0, 2)$. Ne segue che, nel piano $z = 0$, la retta $y = (x-1) + \frac{5}{2} = x + \frac{3}{2}$ è tangente a T e, in $\mathbb{R}^3$, il piano

$$y = x + \frac{3}{2}$$

è tangente al solido D e parallelo a L.

(b) Per il teorema di Pappo-Guldino

$$|D| = 2\pi d \cdot |T| = 2\pi \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{6\pi\sqrt{2}}{5}$$

dove d è la distanza del baricentro $(\overline{x}, \overline{y}, 0)$ di T da L.

Calcoli:

$$|T| = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x}^{4x-\frac{3}{2}x^2} 1 \, dx\, dy = \int_0^2 3x - \frac{3}{2}x^2 \, dx = \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_0^2 = 2,$$

$$\overline{x} = \frac{1}{|T|} \int_{x=0}^{2} x \left(\int_{y=x}^{4x-\frac{3}{2}x^2} dy \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2 - \frac{3}{2}x^3 \, dx = \frac{1}{2}\left[x^3 - 3\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 1,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{|T|} \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=x}^{4x-\frac{3}{2}x^2} y \, dy \right) dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \underbrace{\left(4x - \frac{3}{2}x^2\right)^2 - x^2}_{15x^2 - 12x^3 + \frac{9}{4}x^4} dx = \frac{1}{4}\left[5x^3 - 3x^4 + \frac{9x^5}{20}\right]_0^2 = \frac{8}{5}.$$

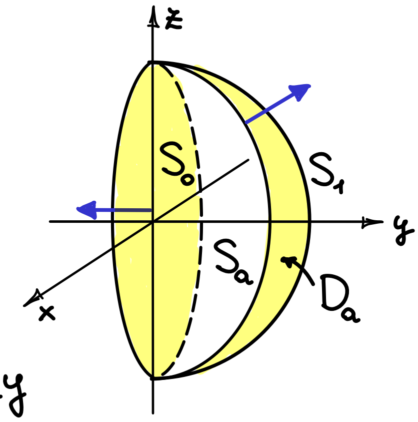
Infine

$$d = \frac{1}{2}\|(\overline{x}, \overline{y}) - (\overline{y}, \overline{x})\| = \frac{1}{2}\left\|\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\| = \frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4. Per $a > 0$ sia $S_a = \{(x, y, z) : a^2x^2 + y^2 + a^2z^2 = a^2, y \geq 0\}$.

(a) Per $a \in (0, 1)$, calcolare $\displaystyle\iiint_{D_a} \frac{5x + 6y}{1 + \sqrt{x^2 + z^2}}\, dxdydz$ dove D_a è il solido limitato che ha come bordo $S_a \cup S_1$.

(b) Per $a > 0$, calcolare $\displaystyle\iint_{S_a} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (4x + e^z, e^{x^2+z^2} - 5y, 7z + e^y)$ e S_a è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}\rangle \geq 0$ in ogni suo punto.



(a) $$\iiint_{D_a} \frac{5x+6y}{1+\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdydz$$

x-dispari

D_a ← simm. per $x=0$

$x=\rho\cos\theta,\ z=\rho\sin\theta,\ y=y$

$$\overset{CC}{=} \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{y=a\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{6y}{1+\rho}\,\rho\, d\rho\, d\theta\, dy$$

$$= 6\pi\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho}\left[y^2\right]_{a\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 6\pi\int_0^1 \frac{\rho}{\cancel{1+\rho}}\overset{1-\rho}{\cancel{(1-\rho^2)}}(1-a^2)\,d\rho$$

$$= 6\pi(1-a^2)\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \pi(1-a^2).$$

(b) $$\iint_{S_a} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iiint_E \overbrace{\mathrm{div}(\vec{F})}^{4-5+7=6}\,dxdydz - \iint_{S_0}\langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle$$

$E = \left\{x^2+\frac{y^2}{a^2}+z^2 \leq 1,\ y\geq 0\right\}$ semi-ellissoide

$S_0 = \{x^2+z^2\leq 1,\ y=0\}$

$$= 6|E| - \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \langle (*, e^{\rho^2}, *), (0,-1,0)\rangle\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a + 2\pi\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\, d\rho = 4\pi a + \pi\left[e^{\rho^2}\right]_0^1$$

$$= \pi(4a+e-1).$$