Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 14-2-2025

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = y^2 e^x$.

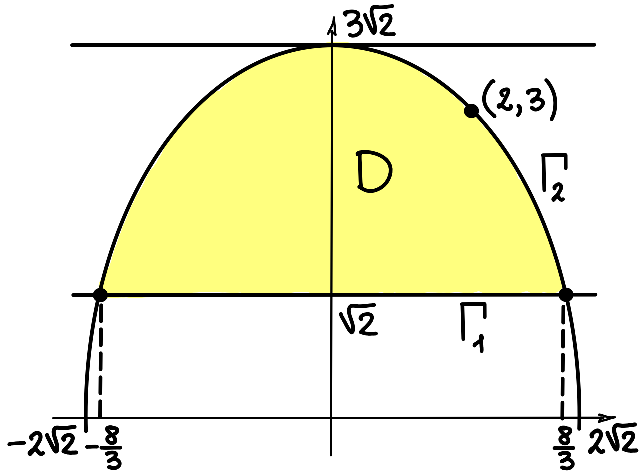
(a) Determinare il valore il massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x,y) : 9x^2 + 4y^2 \le 72,\ |y - 2\sqrt{2}| \le \sqrt{2}\}.$$

(b) Trovare dei valori reali per x_0, y_0 e R in modo che in

$$C = \{(x,y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2\}$$

il valore il massimo di f sia e^2 e il valore minimo di f sia 0.



(a) $\nabla f(x,y) = (y^2 e^x, 2ye^x)$

$$\begin{cases} y^2 e^x = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \iff y = 0$$

e quindi in D non ci sono punti stazionari.

Inoltre $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove

1) $\Gamma_1 = \left\{(x, \sqrt{2}) : x \in \left[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]\right\}$

con $h(x) = f(x, \sqrt{2}) = 2e^x$ $\qquad -8/3 \quad 8/3$ $\qquad \boxed{f(\pm\frac{8}{3}, \sqrt{2}) = 2e^{\pm 8/3}}$

2) $\Gamma_2 = \left\{(x,y) : g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 72 = 0,\ y \ge \sqrt{2}\right\}$ vincolo regolare

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} y^2 e^x = \lambda 18x \\ 2ye^x = \lambda 8y \\ 9x^2 + 4y^2 = 72 \end{cases}$$

$\rightarrow \dfrac{\cancel{y^2}\cancel{e^x}}{\cancel{2y}\cancel{e^x}} = \dfrac{\cancel{\lambda}18x}{\cancel{\lambda}8\cancel{y}} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$ $\qquad \boxed{f(2,3) = 9e^2}$

$\rightarrow 9x^2 + 4 \cdot \frac{9}{2}x = 72 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2, \cancel{-4}$

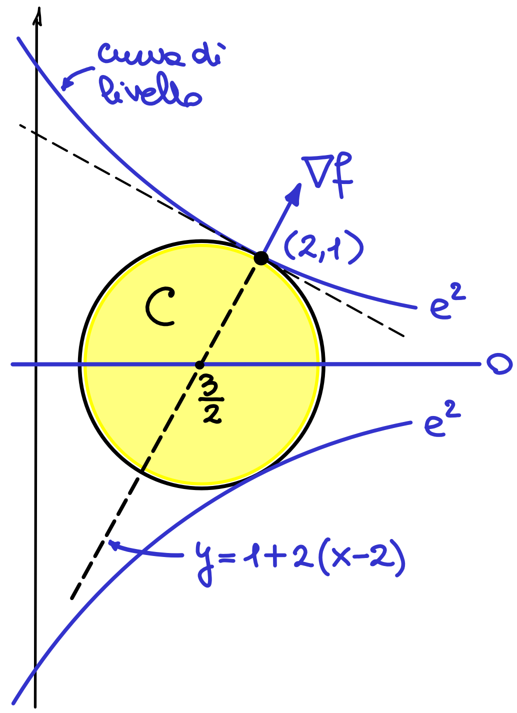
$y = 3, \cancel{-3}$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $9e^2$ e quello minimo è $2e^{-8/3}$.

(b) Si noti che $f(x,y) \geq 0$ e che f vale 0 lungo la retta $y=0$. Inoltre $f(2,1)=e^2$. Così affinché f assuma valore minimo 0 e valore massimo e^2 nel cerchio C basta che C intersechi la retta $y=0$ e sia tangente alla curva di livello e^2 in $(2,1)$ in modo che il gradiente

$$\nabla f(2,1) = e^2 \cdot (1,2)$$

punti verso l'esterno.



Ad esempio il cerchio di centro $(\frac{3}{2},0)$ e raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$(x-\tfrac{3}{2})^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}$$

ha la proprietà richiesta.

Esercizio 2. Sia l'equazione $xe^y + y\log(x) = 1$.

(a) Verificare che in un intorno di $(1,0)$ l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 0$ e calcolare il suo polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$.

(b) Calcolare il limite di

$$f(x,y) = \frac{\big(y\sin(\pi x)\big)^2}{(x-1)^3 + (e^y - 1)^3}$$

per $(x,y) \to (1,0)$ lungo la curva data dai punti che soddisfano l'equazione.

(a) Sia $g(x,y) = xe^y + y\log(x) - 1$ allora

$$g_x(x,y) = e^y + \frac{y}{x} \quad , \quad g_y(x,y) = xe^y + \log(x).$$

Dato che $g_y(1,0) \neq 0$ allora per il teo. delle funzioni implicite $\exists\ y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 0$ e

$$\varphi'(1) = -\frac{g_x(1,0)}{g_y(1,0)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Inoltre derivando due volte l'equazione

$$xe^\varphi + \varphi\log(x) = 1$$

rispetto a x si ha

$$e^\varphi + xe^\varphi\varphi' + \varphi'\log(x) + \varphi\frac{1}{x} = 0$$

e

$$2e^\varphi\varphi' + xe^\varphi(\varphi')^2 + xe^\varphi\varphi'' + \varphi''\log(x) + 2\varphi'\frac{1}{x} - \varphi\frac{1}{x^2} = 0.$$

Infine ponendo $x=1$ si trova

$$-2 + 1 + \varphi'' + 0 - 2 - 0 = 0 \implies \varphi''(1) = 3$$

e quindi

$$T_2(x) = 0 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

(b) Per (a), la curva $xe^y + y\log(x) = 1$ è parametrizzata in un intorno di $(1,0)$ come $x \to (x, \varphi(x))$.

Così per $x \to 1$, $t = x-1 \to 0$, $\varphi(x) = -t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$ e

$$f(x,\varphi(x)) = \frac{\varphi^2 \sin^2(\pi x)}{(x-1)^3 + (e^\varphi - 1)^3} = \frac{(t^2 + o(t^2))\cdot(\pi^2 t^2 + o(t^2))}{t^3 + (-t + \underbrace{\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2}_{=2t^2} + o(t^2))^3}$$

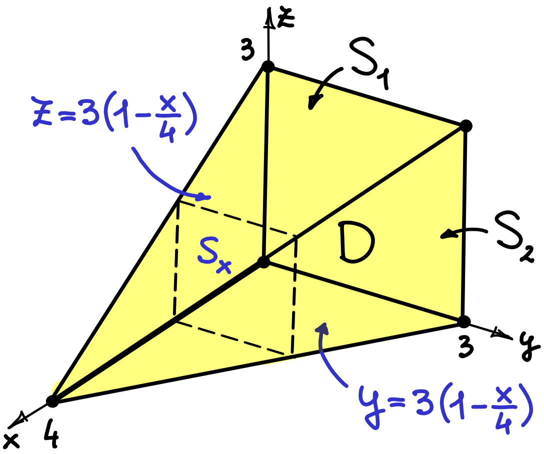
$$= \frac{\pi^2 t^4 + o(t^4)}{\cancel{t^3} - \cancel{t^3} + 3\cdot 2\cdot t^4 + o(t^4)} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 3. Sia D il solido dato dal poliedro di vertici:

$$(0,0,0),\ (4,0,0),\ (0,3,0),\ (0,0,3) \text{ e } (0,3,3).$$

(a) Calcolare $\dfrac{1}{|D|}\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$

(b) Calcolare $\dfrac{1}{|\partial D|}\displaystyle\iint_{\partial D} xyz\,dS.$



(a) Il volume della piramide D è $|D| = \frac{3^2\cdot 4}{3} = 12$. Si noti che D è simmetrico rispetto al piano $z=y$.

$$\iiint_D x^2\,dxdydz = \int_{x=0}^{4} x^2 |S_x|\,dx = \int_0^4 x^2\cdot 3^2\left(1-\frac{x}{4}\right)^2 dx \overset{t=\frac{x}{4}}{=} 4^3\cdot 3^2\int_0^1 \underbrace{t^2(1-t)^2}_{t^2-2t^3+t^4}\,dt$$

$$= 4^3\cdot 3^2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4^3\cdot 3^{\cancel{2}}}{2\cdot\cancel{3}\cdot 5} = \frac{2^5\cdot 3}{5}$$

$$\iiint_D y^2\,dxdydz = \int_{x=0}^{4}\left(\iint_{S_x} y^2\,dydz\right)dx = \int_0^4 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{3(1-\frac{x}{4})}\cdot\left[z\right]_0^{3(1-\frac{x}{4})} dx$$

$$= 3^3\int_0^4\left(1-\frac{x}{4}\right)^4 dx = \frac{3^3\cdot 4}{5}\left[-\left(1-\frac{x}{4}\right)^5\right]_0^4 = \frac{2^2\cdot 3^3}{5}$$

e per simmetria $\displaystyle\iiint_D z^2\,dxdydz = \iiint_D y^2\,dxdydz$.
Così

$$\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \frac{1}{12}\left(\frac{2^5\cdot 3}{5}+2\cdot\frac{2^2\cdot 3^3}{5}\right) = \frac{26}{5}.$$

(b) Il bordo di D è costituito da 5 facce piane di area

$$|\partial D| = 3\cdot 3 + 2\cdot\frac{3\cdot 4}{2} + 2\cdot\frac{3\cdot \overset{\sqrt{3^2+4^2}}{5}}{2} = 36$$

L'integrale di xyz vale 0 sulle facce contenute nei piani $x=0$, $y=0$ o $z=0$. Rimangono da calcolare gli integrali sulle facce S_1 e S_2 che per simmetria sono uguali.

Parametrizzazione di S_1:

$$\vec{\sigma}(x,y) = \left(x, y, 3\left(1-\frac{x}{4}\right)\right) \quad \text{con } A = \left\{(x,y) : \begin{array}{c} x \in [0,4] \\ 0 \le y \le 3\left(1-\frac{x}{4}\right) \end{array}\right\}.$$

Allora $\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y} = \left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)$ e $\|\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y}\| = \frac{5}{4}$.

Così

$$\iint_{S_1} xyz\, dS = \frac{3\cdot 5}{4} \iint_A xy\left(1-\frac{x}{4}\right) dx\,dy = \frac{3\cdot 5}{4} \int_0^4 x\left(1-\frac{x}{4}\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3\left(1-\frac{x}{4}\right)} dx$$

$$\overset{t = 1-\frac{x}{4}}{=} 2\cdot 3^3 \cdot 5 \int_0^1 \underbrace{(1-t)t^3}_{t^3 - t^4} dt = 2\cdot 3^3\cdot 5\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{27}{2}.$$

Infine

$$\frac{1}{|\partial D|} \iint_{\partial D} xyz\, dS = \frac{1}{36}\left(3\cdot 0 + 2\cdot \frac{27}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 4. Sia $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2, 2x, z^2\right)$ e siano

$$S_1 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 3,\ z^2 \geq x^2+(y-1)^2,\ z \geq 0\right\}$$

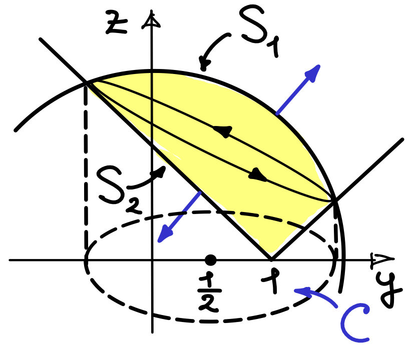
orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \geq 0$ in ogni suo punto, e

$$S_2 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ z^2 = x^2+(y-1)^2,\ z \geq 0\right\}$$

è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \leq 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1\cup S_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove γ è la curva chiusa data da $S_1 \cap S_2$ orientata in senso antiorario rispetto all'asse z.



(a) $S_1 \cup S_2$ è il bordo del solido

$$D = \left\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+(y-1)^2} \leq z \leq \sqrt{3-x^2-y^2}\right\}$$

orientato verso l'esterno.

La proiezione C di D sul piano $z=0$ è

$$x^2+y^2+\left(x^2+(y-1)^2\right) \leq 3,\quad \cancel{2}x^2+\cancel{2}y^2-\cancel{2}y \leq \cancel{2}^{1},\quad x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}+1 = \tfrac{5}{4}.$$

Così per il teorema della divergenza

$$\iint_{S_1\cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{2z}\,dx\,dy\,dz = \iint_C \left[z^2\right]_{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dx\,dy$$

$$= 2\iint_C \left(\frac{5}{4} - x^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right) dx\,dy$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}+\rho\sin\theta \end{cases} \quad = 2\int_{\rho=0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{5}{4}-\rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\theta = \cancel{4}\pi\left[\frac{5}{\cancel{4}}\cdot\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{\cancel{4}}\right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{25\pi}{16}.$$

(b) $S_1 \cap S_2$ con l'orientazione data è il bordo di S_1 e per il teorema del rotore

$$\int_{S_1\cap S_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \iint_{S_1} \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S}\rangle = \iint_C \langle (0,0,2), (*,*,1)\rangle\,dx\,dy$$

$$= 2|C| = 2\,\frac{5}{4}\pi = \frac{5\pi}{2}$$

dove è stata usata la parametrizzazione cartesiana di S_1.