Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 24-1-2025

Esercizio 1. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-y)(x^2-y^2)^2(x+y+4)^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Verificare che f è continua in $(0,0)$. f è differenziabile in $(0,0)$?
(b) Determinare un insieme aperto e non limitato $A\subset\mathbb{R}^2$ dove la funzione f è limitata.

(a) Per $(x,y)\to(0,0)$

$$f(x,y)=\frac{(x-y)^3(x+y)^2(4+x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}\overset{CP}{=}\frac{\cancel{\rho^5}}{\cancel{\rho^4}}\cdot\overbrace{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}^{\text{limitata}}(4+o(1))^2\to 0 \overset{\text{"}}{=} f(0,0)$$

e quindi f è continua in $(0,0)$. Inoltre

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t^5}(4+o(1))^2}{\cancel{t\cdot t^4}}=16,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\cancel{t^5}(4+o(1))^2}{\cancel{t\cdot t^4}}=-16.$$

Così

$$\frac{f(x,y)-<\nabla f(0,0),(x,y)>}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{(x-y)^3(x+y)^2(4+x+y)^2-(x^2+y^2)^2 16(x-y)}{(x^2+y^2)^{5/2}}\qquad(*)$$

Lungo la retta $y=x$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{0}{(2x^2)^{5/2}}=0$

$\neq$

Lungo la retta $y=-x$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{-16(2x)}{(2x^2)^{1/2}}=-16\sqrt2$

Il limite di $(*)$ per $(x,y)\to(0,0)$ non esiste.

Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

(b) Un insieme aperto e non limitato dove la f è limitata è

$$A=\{(x,y): 0<x+y<1\}.$$

Infatti per $(x,y)\in A$

$$|f(x,y)|=\underbrace{\frac{|x-y|^3|x+y|}{(x^2+y^2)^2}}_{|\cos\theta-\operatorname{sen}\theta|^3|\cos\theta+\operatorname{sen}\theta|\le 2^3\cdot2=2^4}\cdot\overbrace{|x+y|}^{<1}(4+\overbrace{x+y}^{\in(0,1)})^2<2^4\cdot1\cdot(4+1)^2.$$

Esercizio 2. Sia $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\dfrac{14+axy+axy^2}{1+y},\dfrac{(x+xy)^2-14x}{(1+y)^2}\right)$.

(a) Trovare i valori di $a\in\mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ e per tali valori determinare una funzione potenziale.

(b) Determinare i valori di $a\in\mathbb{R}$ tali che

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = 0,$$

dove γ è la curva formata dal segmento da $(1,0)$ a $(4,1)$, dalla semicirconferenza da $(4,1)$ a $(-2,1)$ passante per $(1,4)$ e infine dal segmento da $(-2,1)$ a $(1,1)$.

Riscriviamo il campo come $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{14}{1+y}+axy,\ x^2-\frac{14x}{(1+y)^2}\right)$

(a) Il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ se

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=2x-\cancel{\frac{14}{(1+y)^2}}+\cancel{\frac{14}{(1+y)^2}}-ax=0 \iff a=2$$

Dato che $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$ è semplicemente connesso, per $a=2$ $\vec{F}$ è conservativo con potenziale

$$U(x,y)=\int\left(\frac{14}{1+y}+2xy\right)dx=\frac{14x}{1+y}+x^2y+c(y)=\frac{14x}{1+y}+x^2y+c$$

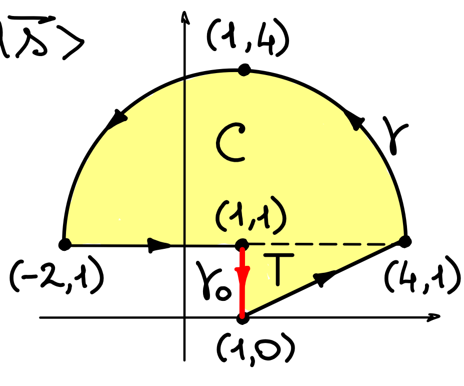
perchè

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-14x}{(1+y)^2}+x^2+c'(y)=\frac{-14x}{(1+y)^2}+x^2 \Rightarrow c'(y)=0.$$

(b) Notiamo che $\vec{F}(x,y)=\nabla U(x,y)+(a-2)(xy,0)$ e così

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = U(1,1)-U(1,0)+(a-2)\int_\gamma \langle (xy,0), d\vec{s}\rangle$$

$$=8-14-(a-2)\left(\frac{9\pi}{2}+3\right)$$



dove

$$\int_\gamma \langle (xy,0), d\vec{s}\rangle \overset{GG}{=} \iint_{C\cup T}(-x)\,dx - \int_{\gamma_0}\overbrace{\langle (xy,0), d\vec{s}\rangle}^{=0}$$

$$=-\left(|C|\,\bar{x}_C+|T|\,\bar{x}_T\right)=-\left(\frac{9\pi}{2}\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{4+1+1}{3}\right)=-\left(\frac{9\pi}{2}+3\right).$$

Così l'integrale è nullo se $8-14-(a-2)\left(\frac{9\pi}{2}+3\right)=0$ ossia se

$$a=2+\frac{-6}{\frac{9\pi}{2}+3}=\frac{6\pi}{3\pi+2}.$$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y,z) : x^2 - z^2 \le 1 - y^2,\ 0 \le z \le 2\}$.

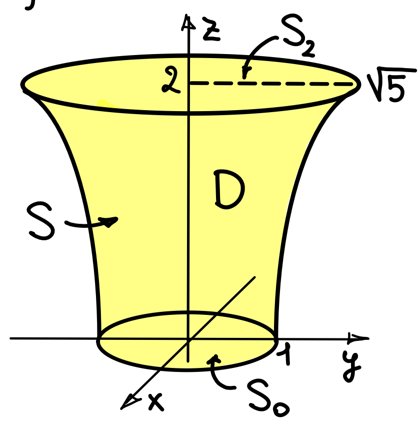
(a) Calcolare $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2 e^z}{1+z^2}\, dxdydz$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{\partial D} \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}\, dS$.

$$\text{(a)} \iiint_D \frac{x^2e^z}{1+z^2}\,dxdydz \overset{CC}{=} \int_{z=0}^{2} \frac{e^z}{1+z^2} \int_{\rho=0}^{\sqrt{z^2+1}} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\rho\cos\theta)^2 \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^2 \frac{e^z}{1+z^2}\, \pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z^2+1}} dz = \frac{\pi}{4}\int_0^2 e^z(1+z^2)\,dz$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[e^z(z^2-2z+3)\right]_0^2 = \frac{3\pi}{4}(e^2-1).$$



(b) Il bordo di D è formato da due cerchi S_0 e S_2 e da una superficie S con parametrizzazione

$$\vec{\sigma}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2-1}\right) \quad \text{con } A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 5\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, 1\right) \quad e \quad \|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \left(\frac{2(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2-1}\right)^{1/2}$$

Così

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{1+2z^2}} = \iint_A \frac{1}{\cancel{\sqrt{1+2(x^2+y^2-1)}}} \left(\frac{\cancel{2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2-1}\right)^{1/2} dxdy$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=1}^{\sqrt{5}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-1}}\, d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\sqrt{\rho^2-1}\right]_1^{\sqrt{5}} = 4\pi.$$

Inoltre

$$\iint_{S_0} \frac{dS}{\sqrt{1+2\underset{0}{z^2}}} = |S_0| = \pi \quad e \quad \iint_{S_2} \frac{dS}{\sqrt{1+2\underset{2}{z^2}}} = \frac{1}{3}|S_2| = \frac{5\pi}{3}.$$

Infine

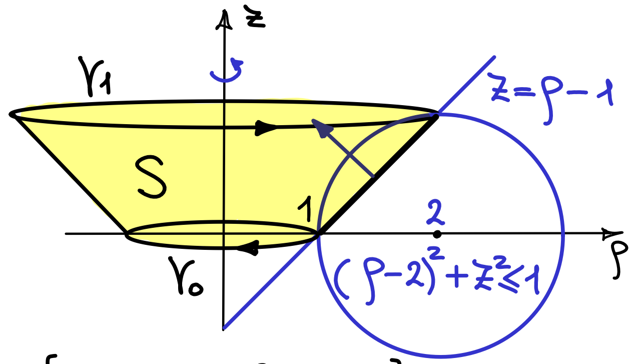
$$\iint_{\partial D = S \cup S_0 \cup S_2} \frac{dS}{\sqrt{1+2z^2}} = 4\pi + \pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}.$$

Esercizio 4. Sia $S = \left\{(x,y,z) : (z+1)^2 = x^2+y^2,\ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 \le 1\right\}$.
La superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare il flusso $\iint_S \langle \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(-2y, xz^2, 3x^2\right)$.

(b) Verificare il calcolo fatto in (a) applicando il teorema del rotore.

La superficie S è la parte del cono $z=\rho-1$ contenuta nel toro $(\rho-2)^2+z^2\le 1$.



Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}-1\right) \quad \text{con } A = \left\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) \quad \text{orientazione corretta}$$

Calcolo del rotore:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -2y & xz^2 & 3x^2 \end{bmatrix} = \left(-2xz, -6x, z^2+2\right).$$

Quindi

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S}\rangle = \iint_{A} \Big(\frac{2x^2 z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \overbrace{\frac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{x\text{-dispari}} + z^2 + 2 \Big)\, dx\, dy$$

x-simmetrico $\to A$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=1}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(2\rho\cos^2\theta(\rho-1) + (\rho-1)^2 + 2\right)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_1^2 \overbrace{\left(\rho(\rho-1)+(\rho-1)^2+2\right)\rho}^{2\rho^3-3\rho^2+3\rho}\, d\rho = \pi\left[\rho^4 - 2\rho^3 + 3\rho^2\right]_1^2 = 10\pi.$$

(b) Il bordo di S è dato da due circonferenze

$$\vec{\gamma}_0(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \quad \text{con } t \in [2\pi, 0],$$

$$\vec{\gamma}_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Così per il teo. del rotore,

$$\iint_S \langle rot(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma_0 \cup \gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 12\pi - 2\pi = 10\pi$$

perché

$$\int_{\gamma_0} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -\int_0^{2\pi} \langle (-2\,\text{sen}\,t, 0, *), (-\text{sen}\,t, *, 0) \rangle dt$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t\, dt = -2\pi$$

e

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (-4\,\text{sen}\,t, 2\cos t, *), (-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t, 0) \rangle dt$$

$$= 8\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t\, dt + 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 12\pi.$$