

**Analisi Matematica - CdL Informatica**  
**Svolgimento della prova scritta del 17/9/2025**

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \frac{|2e^x - 1|}{e^x - 3}$ .

a) Determinare il dominio e gli intervalli di monotonia di  $f$ .

b) Per quali  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione  $f(x) = k$  non ha soluzioni?

a) Il dominio di  $f$  è dato dalla condizione  $e^x - 3 \neq 0$  e quindi  $D = \mathbb{R} \setminus \{\log(3)\}$ .

Inoltre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2e^x - 1}{e^x - 3} & \text{se } x \geq -\log(2) \text{ e } x \neq \log(3) \\ -\frac{2e^x - 1}{e^x - 3} & \text{se } x < -\log(2) \end{cases}.$$

Così, per  $x > -\log(2)$  e  $x \neq \log(3)$ ,

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 3) - (2e^x - 1)e^x}{(e^x - 3)^2} = -\frac{5e^x}{(e^x - 3)^2} < 0$$

e quindi  $f$  è strettamente decrescente in  $[-\log(2), \log(3))$  e in  $(\log(3), +\infty)$ .

Invece, per  $x < -\log(2)$ ,

$$f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x - 3)^2} > 0$$

e quindi  $f$  è strettamente crescente in  $(-\infty, -\log(2)]$ .

b) Per la monotonia studiata in a) e il teorema dei valori intermedi si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\log(3))^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 &\implies f((\log(3), +\infty)) = (2, +\infty), \\ f(-\log(2)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (\log(3))^-} f(x) = -\infty &\implies f([-\log(2), \log(3))) = (-\infty, 0], \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1/3 \quad \text{e} \quad f(-\log(2)) = 0 &\implies f((-\infty, -\log(2)]) = (-1/3, 0]. \end{aligned}$$

Ne segue che l'immagine di  $f$  è

$$f(D) = (-1/3, 0] \cup (-\infty, 0] \cup (2, +\infty) = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty).$$

Possiamo così concludere che l'equazione  $f(x) = k$  non ha soluzione solo quando  $k \notin f(D)$  ossia se  $k \in (0, 2]$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f(x) = \frac{(x^{1/x^2} - 1) \log\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\log(2x)(\sqrt{2 + 9x^4} - x^2)}$ .

a) Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

b) Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot x^n)$  per ogni intero positivo  $n$ .

a) Per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\begin{aligned} x^{1/x^2} &= e^{\log(x)/x^2} \rightarrow 0, \\ \log\left(2 + \frac{1}{x}\right) &\sim \log(1/x) = -\log(x), \\ \log(2x) &= \log(2) + \log(x) \sim \log(x), \\ \sqrt{2 + 9x^4} - x^2 &\rightarrow \sqrt{2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) \sim \frac{(0 - 1) \cdot (-\log(x))}{\log(x) \cdot \sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} x^{1/x^2} - 1 &= e^{\log(x)/x^2} - 1 \sim \frac{\log(x)}{x^2}, \\ \log\left(2 + \frac{1}{x}\right) &\rightarrow \log(2), \\ \log(2x) &= \log(2) + \log(x) \sim \log(x), \\ \sqrt{2 + 9x^4} - x^2 &\sim \sqrt{9x^4} - x^2 = 3x^2 - x^2 = 2x^2, \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) \cdot x^n \sim \frac{\frac{\log(x)}{x^2} \cdot \log(2)}{\log(x) \cdot 2x^2} \cdot x^n = \frac{\log(2)}{2} \cdot x^{n-4} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } n > 4, \\ \frac{\log(2)}{2} & \text{se } n = 4, \\ 0 & \text{se } n < 4. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** a) Calcolare  $\int_2^3 \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$ .

b) Esiste  $t > 0$  tale che  $\int_0^t \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = 0$ ?

a) Abbiamo che

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{x-1}{(x-2)^2+1} = \frac{x-2}{(x-2)^2+1} + \frac{1}{(x-2)^2+1}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx &= \int \frac{x-2}{(x-2)^2+1} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log((x-2)^2+1) + \arctan(x-2) + c. \end{aligned}$$

Allora

$$\int_2^3 \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = \left[ \frac{1}{2} \log((x-2)^2+1) + \arctan(x-2) \right]_2^3 = \frac{1}{2} \log(2) + \frac{\pi}{4}.$$

b) Consideriamo la funzione integrale

$$F(t) = \int_0^t \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione  $F$  è continua in  $[0, +\infty)$ . Dato che per  $x \in [0, 1)$ ,  $\frac{x-1}{x^2-4x+5} < 0$  allora  $F(1) < 0$ . Inoltre, per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} \sim \frac{1}{x}$$

e quindi l'integrale improprio è divergente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = +\infty.$$

Allora per il teorema degli zeri deve esistere un valore  $t > 1$  tale  $F(t) = 0$ .

**Esercizio 4.** a) Trovare tutti i punti critici di

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}.$$

b) Calcolare la matrice hessiana di  $f$  in tali punti.

a) Le derivate parziali sono

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} + (x + y)(-2x)e^{-x^2 - y^2} = (1 - 2x^2 - 2xy)e^{-x^2 - y^2}, \\ f_y(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} + (x + y)(-2y)e^{-x^2 - y^2} = (1 - 2y^2 - 2xy)e^{-x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Per determinare i punti critici di  $f$  poniamo  $\nabla f = (f_x, f_y) = (0, 0)$  e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} (1 - 2x^2 - 2xy)e^{-x^2 - y^2} = 0 \\ (1 - 2y^2 - 2xy)e^{-x^2 - y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 1 \\ 2y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 2y^2 + 2xy \\ 2y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha  $x^2 = y^2$  da cui  $x = y$  oppure  $x = -y$  e quindi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 4y^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -y \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottengono i punti critici  $(1/2, 1/2)$  e  $(-1/2, -1/2)$  mentre il secondo sistema non ha soluzioni.

b) Le derivate seconde di  $f$  sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (-4x - 2y)e^{-x^2 - y^2} + (1 - 2x^2 - 2xy)(-2x)e^{-x^2 - y^2}, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = (-2x)e^{-x^2 - y^2} + (1 - 2x^2 - 2xy)(-2y)e^{-x^2 - y^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= (-4y - 2x)e^{-x^2 - y^2} + (1 - 2y^2 - 2xy)(-2y)e^{-x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Infine calcoliamo la matrice hessiana in ciascun punto critico,

$$H_f(1/2, 1/2) = \begin{bmatrix} -3e^{-1/2} & -e^{-1/2} \\ -e^{-1/2} & -3e^{-1/2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_f(-1/2, -1/2) = \begin{bmatrix} 3e^{-1/2} & e^{-1/2} \\ e^{-1/2} & 3e^{-1/2} \end{bmatrix}.$$