Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 3/9/2025

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{\log(x)}{1 - \big(\log(x)\big)^2}$.

a) Determinare il dominio di f.

b) Determinare l'insieme $I = \{f(x) : x \in (e, +\infty)\}$.

c) Dimostrare che $f : (e, +\infty) \to I$ è invertibile e trovare la funzione inversa f^{-1}.

a) Il dominio di f è dato dalle condizioni $x > 0$ e $\log(x) \neq \pm 1$ e quindi

$$D = (0, +\infty) \setminus \{e, 1/e\}.$$

b) Per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\big(1 - \log^2(x)\big) + \log(x)\frac{2\log(x)}{x}}{\big(1 - \log^2(x)\big)^2} = \frac{1 + \log^2(x)}{x\big(1 - \log^2(x)\big)^2} > 0$$

e quindi f è strettamente crescente in ogni intervallo contenuto in D. In particolare è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ e per il teorema dei valori intermedi f assume ogni valore compreso tra

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

e dunque $I = (-\infty, 0)$.
c) Per $y \in I = (-\infty, 0)$, risolviamo l'equazione $y = f(x)$ rispetto a $x \in (e, +\infty)$, ossia

$$y = \frac{\log(x)}{1 - \log^2(x)} \Leftrightarrow y \log^2(x) + \log(x) - y = 0$$

da cui

$$\log(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}.$$

Il segno da scegliere è $-$ perché $y < 0$ e $\log(x) > 1$. Quindi

$$x = \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$$

e la funzione inversa cercata è

$$f^{-1}(x) = \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}\right).$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{6\arcsin(x/2) - \pi x^2}{\sin(\pi x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{x^2}{2}+x^3\right)^{4/x} - e^{2x}}{1-\cos(x)}$.

a) Il limite è della forma $0/0$. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{6\arcsin(x/2) - \pi x^2}{\sin(\pi x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{6/2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - 2\pi x}{\pi\cos(\pi x)} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3/4}} - 2\pi}{-\pi} = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi} + 2.$$

b) Per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x^2}{2}+x^3\right)^{4/x} &= \exp\left(\frac{4}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{2}+x^3\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{4}{x}\left(\frac{x^2}{2}+x^3+o(x^3)\right)\right) \\
&= \exp\left(2x+4x^2+o(x^2)\right) \\
&= 1+2x+4x^2+o(x^2)+\frac{1}{2}\left(2x+4x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2) \\
&= 1+2x+6x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1+\frac{x^2}{2}+x^3\right)^{4/x} - e^{2x}}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+2x+6x^2+o(x^2) - \left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(6-2)x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 8.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. a) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy per $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{cases} (1-x^2)(y'(x)+12x) = xy(x) \\ y(0) = 5 \end{cases}.$$

b) Dimostrare che $y(x) > 1$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

a) Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{x}{x^2-1}\, y(x) = -12x.$$

Quindi $a(x) = \frac{x}{x^2-1}$,

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \log |x^2 - 1|$$

e il fattore integrante per $x \in (-1, 1)$ è $e^{A(x)} = \sqrt{1-x^2}$.
Inoltre, dopo aver posto $t = 1 - x^2$, si ha che $dt = -2x\, dx$ e

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x)\, dx &= 6 \int (-2x)\sqrt{1-x^2}\, dx = 6 \int t^{1/2}\, dt \\ &= 4t^{3/2} + c = 4(1-x^2)^{3/2} + c. \end{aligned}$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \frac{4(1-x^2)^{3/2} + c}{\sqrt{1-x^2}} = 4(1-x^2) + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 5$ si trova

$$5 = 4 + c \implies c = 1$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = 4(1-x^2) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Per ogni $x \in (-1, 1)$, si ha che $4(1-x^2) > 0$ e $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$ e dunque

$$y(x) = 4(1-x^2) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 + 1 = 1.$$

Esercizio 4. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$|2+i| \cdot \big(2i\overline{z} - z - 1\big) = 4|z| \cdot \mathrm{Re}(z).$$

Ponendo $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$|2+i| \cdot \big(2i(x-iy) - (x+iy) - 1\big) = 4\sqrt{x^2+y^2} \cdot x$$

ossia

$$\sqrt{5} \cdot \big(2ix + 2y - x - iy - 1\big) = 4\sqrt{x^2+y^2} \cdot x$$

dove $|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Separando la parte reale e la parte immaginaria si ha

$$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot \big(2y - x - 1\big) = 4\sqrt{x^2+y^2} \cdot x \\ \sqrt{5} \cdot (2x - y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 4|x| \cdot x \\ y = 2x \end{cases}$$

e distinguendo i casi $x \geq 0$ e $x < 0$ si ottiene

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \cup \begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x < 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni reali mentre il secondo ha come unica soluzione $x = -1$ e $y = 2x = -2$. Quindi l'unica soluzione complessa dell'equazione data è

$$z = -1 - 2i.$$