

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 8/7/2025

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\left|1 + \frac{2}{x}\right|\right) - \frac{1}{x^2}$.

- a) Determinare l'insieme $\{f(x) : x \in D\}$ dove D è il dominio di f .
- b) Quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$?
- c) Quanto vale $\int_4^\infty f(x) dx$?

a) Il dominio di f è dato dalle condizioni $1 + \frac{2}{x} \neq 0$ e $x^2 \neq 0$ e quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Inoltre f è continua in D e agli estremi di D i limiti sono

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{2(x^2 - (x+2))}{x^3(x+2)} = -\frac{2(x+1)(x-2)}{x^3(x+2)}.$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-2, -1]$ e in $(0, 2]$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -2)$, in $[-1, 0)$ e in $[2, +\infty)$. Dunque $x = -1$ e $x = 2$ sono punto di massimo relativo con valori $f(-1) = -1$ e $f(2) = \log(2) - 1/4 > 0$. Confrontando questi valori con i valori dei limiti agli estremi si conclude che $\log(2) - 1/4$ è il valore massimo. Per il teorema dei valori intermedi applicato agli intervalli di D si conclude che

$$\{f(x) : x \in D\} = (-\infty, \log(2) - 1/4].$$

b) Per a), la funzione f è negativa in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, ed è positiva in $[2, +\infty)$. Invece nell'intervallo $(0, 2]$ la funzione è strettamente crescente passando da $-\infty$ a $\log(2) - 1/4 > 0$. Quindi per il teorema degli zeri e la stretta monotonia, in $(0, 2]$ c'è l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.

c) Per b), la funzione f è positiva in $[4, +\infty)$ e per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \log\left(\left|1 + \frac{2}{x}\right|\right) - \frac{1}{x^2} \sim \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \sim \frac{2}{x}.$$

Dato che $\int_4^\infty \frac{1}{x} dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_4^\infty f(x) dx = +\infty$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{\pi x - \sin(\pi x)}{x^2 \log(x) \log\left(\frac{x(1+x)}{2}\right)}$.

a) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot (x-1)^2)$.

b) La serie $\sum_{k=2}^{\infty} f(1/k)$ è convergente?

a) Per $x \rightarrow 1$, si ha che $t = x - 1 \rightarrow 0$ e

$$f(x) \sim \frac{\pi - 0}{\log(1+t) \log\left(\frac{(1+t)(2+t)}{2}\right)} = \frac{\pi}{\log(1+t) \log\left(1 + \frac{3t}{2} + o(t)\right)} \sim \frac{\pi}{t \cdot \frac{3t}{2}}.$$

Così

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot (x-1)^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{t \cdot \frac{3t}{2}} \cdot t^2\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

b) Per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi x - \left(\pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^2 \log(x) \left(\log(x) + \log(1+x) - \log(2)\right)} \\ &\sim \frac{\frac{(\pi x)^3}{6}}{x^2 (\log(x))^2} = C \cdot \frac{x}{(\log(x))^2}. \end{aligned}$$

Quindi per $k \rightarrow +\infty$, $1/k \rightarrow 0$ e

$$f(1/k) \sim C \cdot \frac{1/k}{(\log(1/k))^2} = \frac{C}{k(-\log(k))^2} = \frac{C}{k(\log(k))^2}.$$

Dato che la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^2}$ è convergente ($\alpha = 1$ e $\beta = 2 > 1$), per il criterio del confronto

asintotico anche la serie $\sum_{k=2}^{\infty} f(1/k)$ è convergente.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (1+x^2)y'(x) = x(4+3x^2-y(x)) \\ y(0) = 8 \end{cases} .$$

Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{x}{1+x^2} y(x) = \frac{x(4+3x^2)}{1+x^2}.$$

Quindi $a(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

e il fattore integrante è $e^{A(x)} = \sqrt{1+x^2}$.

Inoltre, dopo aver posto $t = 1+x^2$, si ha che $dt = 2x dx$ e

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x) dx &= \int \frac{x(4+3x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4+3(t-1)}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt + \frac{3}{2} \int t^{1/2} dt \\ &= t^{1/2} + t^{3/2} + c \\ &= (1+x^2)^{1/2} + (1+x^2)^{3/2} + c. \end{aligned}$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = 1 + (1+x^2) + \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} = 2 + x^2 + \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 8$ si trova

$$8 = 2 + c \implies c = 6$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = 2 + x^2 + \frac{6}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = \log(x^2y - 3y^3 + x^2)$.

- a) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.
- b) Trovare tutti i punti critici di f e studiarne la natura.

Il dominio D di f , è dato dai punti (x, y) tali che $x^2y - 3y^3 + x^2 > 0$.
In D , le derivate parziali sono uguali a

$$f_x(x, y) = \frac{2xy + 2x}{x^2y - 3y^3 + x^2} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{x^2 - 9y^2}{x^2y - 3y^3 + x^2}.$$

- a) Il piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$ è

$$z = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) = \log(5) + \frac{8}{5}(x - 2) - (y - 1).$$

- b) Per determinare i punti critici di f poniamo $\nabla f = (f_x, f_y) = (0, 0)$ e risolviamo in D il sistema

$$\begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 - 9y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y + 1) = 0 \\ x^2 = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Il punto $(0, 0)$ va scartato perché non appartiene a D , mentre $(3, -1)$ e $(-3, -1)$ sono effettivamente punti critici.

Le derivate seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\frac{(2xy + 2x)^2}{(x^2y - 3y^3 + x^2)^2} + \frac{2y + 2}{x^2y - 3y^3 + x^2}, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \frac{(2xy + 2x)(x^2 - 9y^2)}{(x^2y - 3y^3 + x^2)^2} + \frac{2x}{x^2y - 3y^3 + x^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= -\frac{(x^2 - 9y^2)}{(x^2y - 3y^3 + x^2)^2} - \frac{18y}{x^2y - 3y^3 + x^2}. \end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana nei punti critici:

$$H_f(\pm 3, -1) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(\pm 3, -1)) = -4 < 0$ allora $(3, -1)$ e $(-3, -1)$ sono punti di sella.