# Analisi Matematica - CdL Informatica
## Svolgimento della prova scritta del 24/6/2025

**Esercizio 1.** Sia $f(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{4}$.

a) Dimostrare che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in (-1,1)$.

b) Determinare gli intervalli di convessità/concavità e i flessi di $f$ nel suo dominio.

c) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente?

a) La funzione $f$ è derivabile nel suo dominio $D = (-1,+\infty)$ e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{2 - 2(1+x) + x(1+x)}{2(1+x)} = \frac{x(x-1)}{2(1+x)}.$$

Dal segno di $f'$, otteniamo che $f$ è strettamente crescente in $(-1,0]$ e in $[1,+\infty)$, mentre è strettamente decrescente in $[0,1]$. Ne segue che $x=0$ è un punto di massimo assoluto rispetto all'intervallo $(-1,1)$ e quindi $f(x) \leq f(0) = 0$ per ogni $x \in (-1,1)$.

b) Per $x \in D$,

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}.$$

Quindi $f$ è convessa negli intervalli di $D$ dove $(1+x)^2 \geq 2$ ossia in $[\sqrt{2}-1,+\infty)$. Inoltre $f$ è concava in $(-1,\sqrt{2}-1]$ e $x = \sqrt{2}-1$ è l'unico punto di flesso.

c) Dato che per ogni $n \geq 2$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in (-1,1)$, per la parte a),

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n}.$$

Quindi, per confronto, la serie data non è convergente (diverge a $-\infty$),

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$$

dove la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz, mentre la serie armonica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.

**Esercizio 2.** Sia $f(x) = \dfrac{4-2\sin(x)}{\sqrt{2+2e^x}-\sqrt{1+x}}$.

a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n=2$ di $f$ in $x_0=0$.

b) La funzione $f$ assume valori negativi nel suo dominio?

a) Per $x \to 0$,

$$4-2\sin(x) = 4-2(x+o(x^2)) = 4-2x+o(x^2).$$

Inoltre

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$$

e

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+2e^x} &= \sqrt{2+2\Big(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)} = \sqrt{4+2x+x^2+o(x^2)}\\
&= 2\sqrt{1+\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\Big)}\\
&= 2\Big(1+\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\Big)-\frac{1}{8}\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\Big)^2+o(x^2)\Big)\\
&= 2+\frac{x}{2}+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\Big)x^2+o(x^2) = 2+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{16}+o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{4-2x+o(x^2)}{2+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{16}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = \frac{4-2x+o(x^2)}{1+\frac{5x^2}{16}+o(x^2)}\\
&= \Big(4-2x+o(x^2)\Big)\Big(1-\frac{5x^2}{16}+o(x^2)\Big) = 4-2x-\frac{5x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

e il polinomio di Taylor cercato è $T_2(x) = 4-2x-\frac{5x^2}{4}$.

b) Il numeratore di $f$ è sempre positivo perché

$$4-2\sin(x) \geq 4-2 = 2 > 0.$$

Per $x \geq -1$, il denominatore è positivo se

$$\sqrt{2+2e^x} > \sqrt{1+x}$$

ossia se $2+2e^x > 1+x$, che si può riscrivere come

$$h(x) = 1+2e^x-x > 0.$$

Tale disuguaglianza vale per ogni $x$ perché $h'(x) = 2e^x-1$ e dunque $h$ ha un minimo assoluto in $x = \log(1/2)$ e così $h(x) \geq h(\log(1/2)) = 1+1-\log(1/2) = 2+\log(2) > 0$. Quindi la funzione $f$ è sempre positiva nel suo dominio.

**Esercizio 3.** Sia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5+4\arctan(\sqrt{x})}{x^{1/a}(1+x)^{3-a}}\,dx$.

a) Determinare per quali $a>0$ l'integrale dato è convergente.

b) Calcolare l'integrale per $a=2$.

a) I punti da indagare sono $0^+$ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{5+4\arctan(\sqrt{x})}{x^{1/a}(1+x)^{3-a}} \sim \frac{5}{x^{1/a}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $1/a < 1$ ossia $a > 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\frac{5+4\arctan(\sqrt{x})}{x^{1/a}(1+x)^{3-a}} \sim \frac{5+2\pi}{x^{1/a}x^{3-a}} = \frac{5+2\pi}{x^{1/a+3-a}}$$

Per la convergenza deve valere la condizione $1/a + 3 - a > 1$ ossia

$$a^2 - 2a - 1 < 0$$

Per $a > 0$ tale condizione è soddisfatta per $a < 1+\sqrt{2}$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a \in (1, 1+\sqrt{2})$.

b) Per $a = 2$, posto $t = \sqrt{x}$, si ha che $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{5+4\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{5+4\arctan(t)}{t(1+t^2)}\,2t\,dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{5+4\arctan(t)}{1+t^2}\,dt \\
&= 10\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt + 8\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt \\
&= 10\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} + 4\left[\arctan^2(t)\right]_0^{+\infty} \\
&= 5\pi + \pi^2.
\end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^3 = 16i|z|$$

e scrivere le soluzioni in forma cartesiana.

Usando la notazione esponenziale si ha che $z = |z|e^{i\theta}$ e $i = e^{i\pi/2}$. Quindi l'equazione diventa

$$|z|^3 e^{i3\theta} = 16e^{i\pi/2}|z|$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} |z|^3 = 16|z| \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{per } k = 0, 1, 2 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione otteniamo che $|z| = 0$ oppure $|z| = 4$, mentre dalla seconda si ha

$$\theta = \frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} = \frac{\pi(1 + 4k)}{6} \quad \text{per } k = 0, 1, 2.$$

Quindi le soluzioni sono quattro:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= 4(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 2\sqrt{3} + 2i, \\ z_3 &= 4(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) = -2\sqrt{3} + 2i, \\ z_4 &= 4(\cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6)) = -4i. \end{aligned}$$