

Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 21/1/2025

Esercizio 1. Sia $f(x) = x \left(\frac{4\sqrt{|x-1|}}{|x|} - 1 \right)$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Determinare l'insieme $\{f(x) : x \in (0, 10]\}$.

c) Trovare un $c \in \mathbb{R}$, tale che l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni.

a) Dominio: dato che $|x-1| \geq 0$, basta che il denominatore $|x|$ sia diverso da zero e dunque $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per comodità, leviamo i moduli distinguendo tre casi:

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x-1} - x & \text{se } x \geq 1 \\ 4\sqrt{1-x} - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ -4\sqrt{1-x} - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Non ci sono asintoti per $x \rightarrow \pm\infty$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = \pm 4 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|x-1|} = \pm\infty.$$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm 4$ e quindi non ci sono asintoti verticali.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x-1}} - 1 & \text{se } x > 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x}} - 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^{3/2}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{(1-x)^{3/2}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{(1-x)^{3/2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studiando il segno di f' si deduce che f è strettamente crescente in $[-3, 0)$ e in $[1, 5]$, mentre è strettamente decrescente in $(-\infty, -3]$, in $(0, 1]$ e in $[5, +\infty)$. Dunque $x = -3$ e $x = 1$ sono entrambi punti di minimo relativo e $x = 5$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluti. Il punto $x = 1$ è un punto di non derivabilità con $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f'_\pm(x) = \pm\infty$ (una cuspid).

Inoltre dal segno di f'' si trova che f è concava in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$ ed è convessa in $(-\infty, 0)$. Non ci sono punti di flesso.

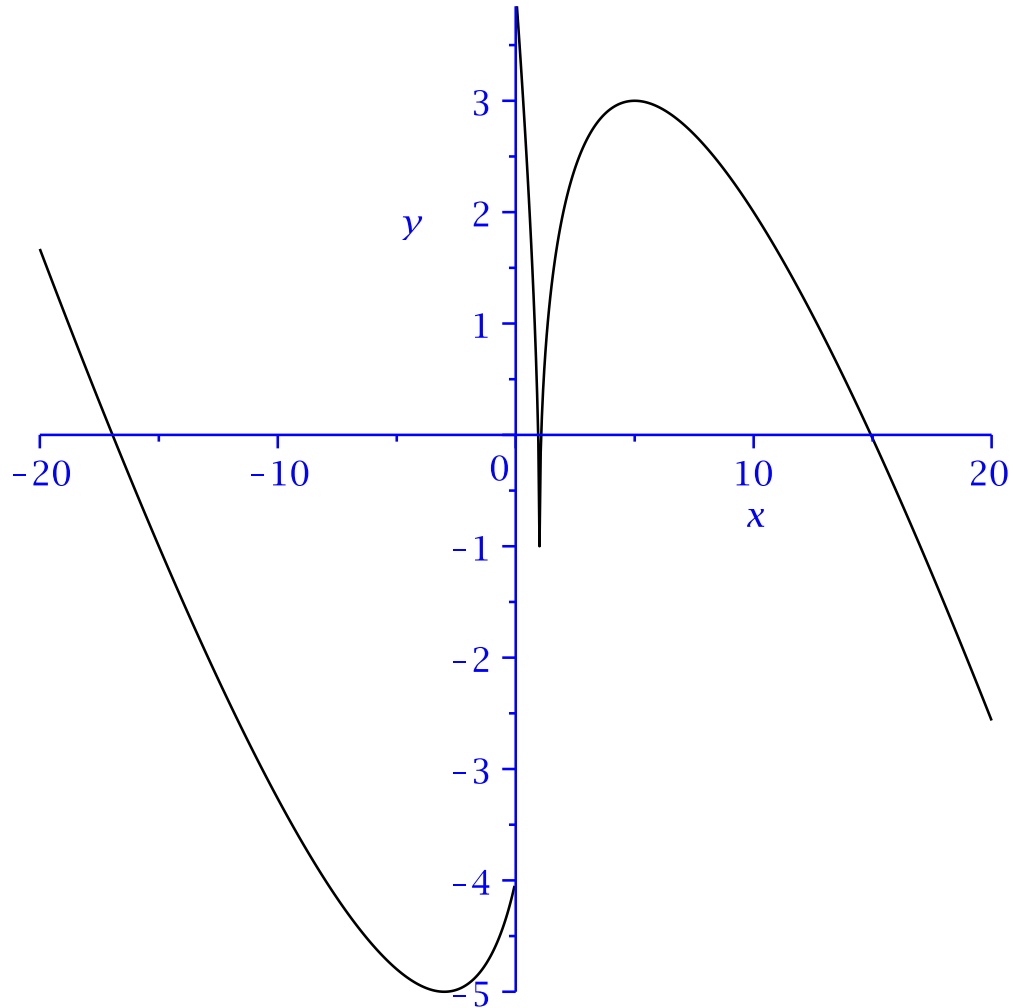


Grafico di $f(x) = x \left(\frac{4\sqrt{|x-1|}}{|x|} - 1 \right)$

Osservando il grafico e applicando il teorema dei valori intermedi alla funzione continua f si ottiene quanto segue.

b) L'insieme immagine $\{f(x) : x \in (0, 10]\}$ è dato da

$$f((0, 1]) \cup f([1, 5]) \cup f([5, 10]) = [-1, 4) \cup [-1, 3] \cup [2, 3] = [-1, 4).$$

c) L'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni ad esempio per $c = -2$: una intersezione sta in $(-\infty, -3)$ e l'altra sta in $(5, +\infty)$.

Esercizio 2. Siano

$$f(x) = (e^x - e^{-x})^2 - \frac{2x^2}{1+x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = x \left(\log \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) - x \right).$$

a) Calcolare i polinomi di Taylor di ordine $n = 4$ di f e g in $x_0 = 0$.

b) Qual è l'asintoto della funzione $h(x) = \frac{f(1/x)}{g(1/x)}$ per $x \rightarrow +\infty$?

a) Abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \right)^2 \\ &\quad - 2x^2(1 - x^2 + o(x^2)) \\ &= \left(2x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^2 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ &= \left(4x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^4) \right) - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) = 2x^2 + \frac{10x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$ è $T_{4,f}(x) = 2x^2 + \frac{10x^4}{3}$.

Inoltre

$$\begin{aligned} g(x) &= x \left(\left(x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^3) - x \right) \\ &= x \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -x^3 + \frac{5x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di g in $x_0 = 0$ è $T_{4,g}(x) = -x^3 + \frac{5x^4}{6}$.

b) Per $x \rightarrow +\infty$ allora $t = 1/x \rightarrow 0^+$ e per a),

$$h(x) = \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \frac{T_{4,f}(1/x) + o(1/x^4)}{T_{4,g}(1/x) + o(1/x^4)} = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x^4} + o(1/x^4)}{-\frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} + o(1/x^4)} = \frac{2x^2 + \frac{10}{3} + o(1)}{-x + \frac{5}{6} + o(1)}.$$

Quindi $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -2$ e

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \frac{10}{3} + o(1) + 2x(-x + \frac{5}{6} + o(1))}{-x + \frac{5}{6} + o(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{3} + o(1) + x(\frac{5}{3} + o(1))}{-x + \frac{5}{6} + o(1)} = \frac{5/3}{-1} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Così l'asintoto cercato è $y = -2x - \frac{5}{3}$.

Esercizio 3. Sia $\int_0^{+\infty} e^{ax} (\arctan(e^{2x}) - \arctan(e^{-2x})) dx$.

a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale dato è convergente.

b) Calcolare l'integrale per $a = -4$.

a) Nell'intervallo $(0, +\infty)$, c'è solo un punto da indagare: $+\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo che

$$e^{ax} (\arctan(e^{2x}) - \arctan(e^{-2x})) \sim e^{ax} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{ax}$$

e dunque per la convergenza deve valere la condizione $a < 0$.

b) Posto $t = e^{-2x}$ si ha che $x = -\log(t)/2$, $dx = -dt/(2t)$ e integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-4x} (\arctan(e^{2x}) - \arctan(e^{-2x})) dx &= \int_1^0 t^2 (\arctan(1/t) - \arctan(t)) \left(-\frac{dt}{2t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t (\arctan(1/t) - \arctan(t)) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (\arctan(1/t) - \arctan(t)) d(t^2) \\ &= \frac{1}{4} [(\arctan(1/t) - \arctan(t))t^2]_0^+ \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{-1/t^2}{1 + (1/t)^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) t^2 dt \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \arctan(t) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia la seguente equazione di secondo grado in \mathbb{C} :

$$z(z - 2\sqrt{2}i) = 2\sqrt{3}i.$$

- a) Calcolare le radici quadrate del discriminante Δ .
- b) Determinare le soluzioni dell'equazione in forma cartesiana.

a) Risistemando i termini si trova

$$z^2 - 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{3}i = 0$$

e quindi il discriminante Δ è uguale a

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2}i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2\sqrt{3}i) \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{2\pi i/3}.\end{aligned}$$

Allora le sue due radici quadrate sono

$$\pm 4e^{\pi i/3} = \pm 4\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 2(1 + i\sqrt{3}).$$

b) Infine le due soluzioni dell'equazione in forma cartesiana sono:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i\sqrt{2} + 2(1 + i\sqrt{3})}{2} = 1 + i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

e

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i\sqrt{2} - 2(1 + i\sqrt{3})}{2} = -1 + i(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$