Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 12-7-2024

Esercizio 1. Si consideri la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4k+3}{k(k+1)} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2k}.$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente.

(b) Calcolare la somma della serie per $x = 2$.

(a) La serie data è una serie di potenze rispetto a $z = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{4k+3}{k(k+1)}}_{a_k} z^k$$

Abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4k+7}{\cancel{(k+1)}(k+2)} \cdot \frac{k\cancel{(k+1)}}{4k+3} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Per $z=-1$ la serie non converge perché $\frac{4k+3}{k(k+1)} \sim \frac{4}{k}$

Per $z=1$ la serie converge per il criterio di Leibniz

$$\frac{4k+3}{k(k+1)} = \frac{3}{k} + \frac{1}{k+1} \text{ è decrescente e } \to 0.$$

Quindi la serie converge $\forall z \in (-1,1]$.

Così rispetto a x, la serie converge se

$$0 \leq \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \leq 1, \quad (x-1)^2 \leq x^2, \quad \cancel{x^2} - 2x + 1 \leq \cancel{x^2}, \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

(b) Per $x=2$ si ha che $z = \frac{1}{4}$ e la somma vale

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{4^k} = 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{4^k}$$

$\frac{3}{k} + \frac{1}{k+1}$

$$= -3\log\left(1+\frac{1}{4}\right) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}$$

$$= -3\log\left(1+\frac{1}{4}\right) + 4\left(\log\left(1+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5}{4}\right) - 1.$$

Esercizio 2. Sia $f(x,y) = x + 8y + \dfrac{1}{xy}$.

(a) f ammette punti di minimo o massimo assoluto nel suo dominio?

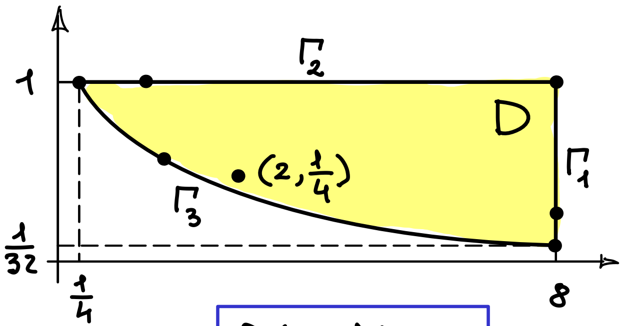
(b) Determinare il valore il massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x,y) : 4xy \geq 1,\ x \in (0,8],\ y \in (0,1]\}.$$

(a) Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + 8 + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$$

la funzione f non ha punti di massimo o minimo assoluto nel suo dominio.



(b) $\nabla f(x,y) = \left(1 - \frac{1}{yx^2},\ 8 - \frac{1}{xy^2}\right)$

per ogni (x,y) : $x \neq 0$ e $y \neq 0$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} yx^2 = 1 & \rightarrow\ y = 1/x^2 \\ 8xy^2 = 1 & \rightarrow\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

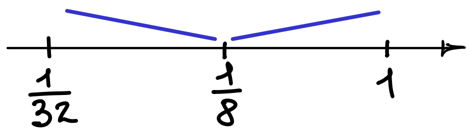
è interno a D compatto

$$\boxed{f\left(2,\frac{1}{4}\right) = 6}$$

Bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$\Gamma_1 = \left\{(8,y) \text{ con } y \in \left[\frac{1}{32}, 1\right)\right\}$ $\quad h(y) = f(8,y) = 8 + 8y + \frac{1}{8y}$

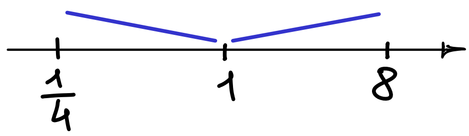
$h'(y) = 8 - \frac{1}{8y^2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} f\left(8,\frac{1}{32}\right) = 12.25 \\ f\left(8,\frac{1}{8}\right) = 10 \end{array}}$$

$\Gamma_2 = \left\{(x,1) \text{ con } x \in \left(\frac{1}{4}, 8\right]\right\}$ $\quad h(x) = f(x,1) = x + 8 + \frac{1}{x}$

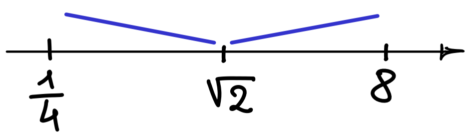
$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} f(8,1) = 16.125 \\ f(1,1) = 10 \end{array}}$$

$\Gamma_3 = \left\{\left(x,\frac{1}{4x}\right) \text{ con } x \in \left[\frac{1}{4}, 8\right)\right\}$ $\quad h(x) = f\left(x,\frac{1}{4x}\right) = x + \frac{2}{x} + 4$

$h'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{4},1\right) = 12.25 \\ f\left(\sqrt{2},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} + 4 \end{array}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è 16.125 e quello minimo è 6.

Esercizio 3. Sia S la superficie

$$S = \left\{ \left(u\cos(v), u, u^2\sin(v) \right) \,:\, u \in [0,2],\, v \in [0,2\pi] \right\}.$$

(a) Determinare il piano tangente a S nel punto $(0,1,1)$.

(b) Calcolare il volume del solido delimitato dalla superficie S e il piano $y = 2$.

(a) Si ha che

$\vec{\sigma}_u = (\cos(v), 1, 2u\,\text{sen}(v))$ e $\vec{\sigma}_v = (-u\,\text{sen}(v), 0, u^2\cos(v))$.

Il punto $P=(0,1,1) \in S$ si ottiene per $u=1$ e $v=\frac{\pi}{2}$ e un vettore ortogonale a S in P è

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = (0,1,2)\times(-1,0,0) = (0,-2,1).$$

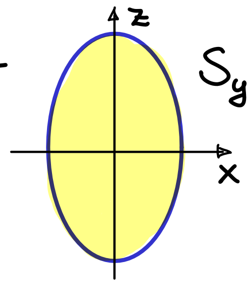
Quindi il piano tangente cercato è

$$0\cdot(x-0) - 2\cdot(y-1) + 1\cdot(z-1) = 0$$

ossia $z = 2y-1$.

(b) Dalla parametrizzazione di S si ha che

$$\forall (x,y,z) \in S \setminus \{(0,0,0)\} \qquad \frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{y^4} = 1$$



ossia la sezione nel piano $y=u$ del solido delimitato da S è un'ellisse di semiassi u e u^2.

Così il volume di tale solido tra i piani $y=0$ e $y=2$ è

$$V = \int_0^2 |S_y|\,dy = \int_0^2 \underbrace{\pi\cdot y\cdot y^2}_{\text{area ellisse}}\,dy = \pi\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi.$$

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-y, x, z^2)$.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove S è la superficie del solido

$$D = \{(x,y,z) : x + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 1\}$$

e S è orientata verso l'esterno.

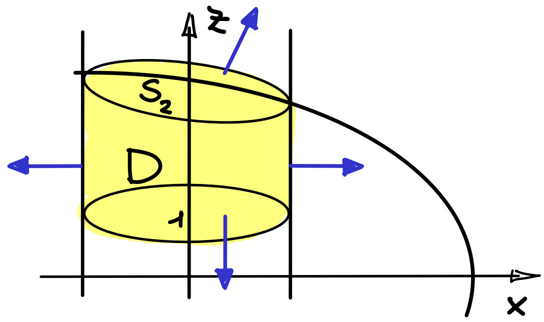
(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove

$$S_2 = \{(x,y,z) : x + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z > 0\}$$

è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \geq 0$.

(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{2z}\, dx\,dy\,dz$$



$$= \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \left[z^2\right]_1^{\sqrt{4-x-y^2}} dx\,dy$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} (4 - \rho\cos\theta - \rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 1)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^1 (3\rho \cdot 2\pi - \pi\rho^3)\, d\rho = \pi\left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{11\pi}{4}.$$

(b) Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x-y^2}) \quad \text{con} \quad A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Così $\displaystyle \vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{1}{2\sqrt{4-x-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x-y^2}}, 1\right)$ $\quad \langle \vec{n}, \vec{k}\rangle \geq 0$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iint_A \left\langle (-y, x, 4-x-y^2), \left(\frac{1}{2\sqrt{4-x-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x-y^2}}, 1\right)\right\rangle dx\,dy$$

$$= \iint_{\underset{\leftarrow\, y\text{-simm. e } x\text{-simm.}}{A}} \Bigg(\overset{y\text{-disp}}{\frac{-y/2 + xy}{\sqrt{4-x-y^2}}} + 4 - \overset{x\text{-disp}}{\overset{\downarrow}{x}} - y^2 \Bigg)\, dx\, dy$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(4 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^1 \left(4\rho \cdot 2\pi - \pi \rho^3\right) d\rho = \pi \left[4\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{15\pi}{4}$$