Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 21-6-2024

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{(x+y)^4 - xy}$.

(a) Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b) Trovare la retta tangente nel punto $(1,0)$ alla curva di livello $C = \{(x,y) \,:\, f(x,y) = 1\}$.

(a) Dato che $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} 0 = 0$

e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\cancel{x^3}}{x^{\cancel{4}}} = +\infty$

si conclude che il limite di f per $(x,y)\to(0,0)$ non esiste.

(b) Da $f(x,y)=1$ si ha

$$h(x,y) = x^2(x+y) - (x+y)^4 + xy = 0.$$

e quindi la retta tangente a C in $(1,0)$ è

$$\nabla h(1,0) \cdot (x-1, y-0) = 0$$

ossia

$$-1(x-1) - 2y = 0 \implies x + 2y = 1$$

perché

$$h_x(x,y) = 2x(x+y) + x^2 - 4(x+y)^3 + y \implies h_x(1,0) = -1,$$

$$h_y(x,y) = x^2 - 4(x+y)^3 + x \implies h_y(1,0) = -2.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$.

(a) Verificare che in un intorno del punto $(1, 2, 3)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni C^1: $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$.

(b) Calcolare $\varphi'(1)$ e $\psi'(1)$.

(a) Il sistema dato è

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \\ g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 36 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix} \xRightarrow{(1,2,3)} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 27 \end{bmatrix} \xRightarrow{\det} 4 \cdot 27 - 6 \cdot 12 = 36 \neq 0$$

e per il teorema delle funzioni implicite per sistemi $\exists\ y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ C^2 tali che $\varphi(1) = 2$, $\psi(1) = 3$ e risolvono il sistema dato in un intorno di $x = 1$.

(b) In un intorno di $x = 1$ si ha che

$$\begin{cases} x^2 + \varphi^2(x) + \psi^2(x) = 14 \\ x^3 + \varphi^3(x) + \psi^3(x) = 36 \end{cases}.$$

Derivando rispetto a x si ottiene

$$\begin{cases} \cancel{2}x + \cancel{2}\varphi\varphi' + \cancel{2}\psi\psi' = 0 \\ \cancel{3}x^2 + \cancel{3}\varphi^2\varphi' + \cancel{3}\psi^2\psi' = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo $x = 1$ si ha

$$\begin{cases} 1 + 2\varphi' + 3\psi' = 0 \\ 1 + 4\varphi' + 9\psi' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi'(1) = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6}{6} = -1 \\[2em] \psi'(1) = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \big(h(x)\cdot(2x^2y - 2xy^3 + y), h(x)\cdot(x - 3y^2)\big)$$

dove $h \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Trovare una funzione h non costante tale che $\boldsymbol{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$ e calcolare il corrispondente potenziale.

(b) Nel caso in cui h sia la costante 1, trovare un rettangolo R di area non nulla tale che

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = 0$$

dove γ è la curva chiusa data dal bordo di R percorso in senso antiorario.

(a) In $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale ossia se $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = h'(x)(x-3y^2) + \cancel{h(x)} = h(x)(2x^2 - 6xy^2 + \cancel{1}) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

da cui

$$h'(x)\cancel{(x-3y^2)} = h(x)\,2x\cancel{(x-3y^2)}.$$

Così h soddisfa l'eq. differenziale lineare omogenea

$$h'(x) - 2x\,h(x) = 0$$

la cui soluzione generale è $h(x) = C\cdot e^{x^2}$.

Una soluzione non costante è $h(x) = e^{x^2}$.

Per trovare la funzione potenziale U risolviamo

$$\begin{cases} U_x = e^{x^2}(2x^2y - 2xy^3 + y) \\ U_y = e^{x^2}(x - 3y^2) \end{cases} \longrightarrow U = \int U_y\,dy = e^{x^2}(xy - y^3) + C(x)$$

e

$$U_x = e^{x^2}\big(2x(xy - y^3) + y\big) + C'(x) = e^{x^2}(2x^2y - 2xy^3 + y)$$

implica $C'(x) = 0$ ossia C è costante.

Quindi un potenziale è $U(x,y) = e^{x^2}(xy - y^3)$.

(b) Supponendo $R=[0,a]\times[0,b]$ con $a,b>0$, per la formula di Gauss-Green

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\cancel{x} - (2x^2-6xy^2+\cancel{x})\right) dy\right) dx$$

$$= \left[\left[-\frac{2}{3}x^3y + x^2y^3\right]_{y=0}^{b}\right]_{x=0}^{a}$$

$$= -\frac{2}{3}a^3b + a^2b^3 = a^2b\left(b^2-\frac{2}{3}a\right)$$

che vale 0 ad esempio per $a=\frac{3}{2}$ e $b=1$.

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(yz^2, \frac{4yz}{x^2+y^2}, 2z \right)$$

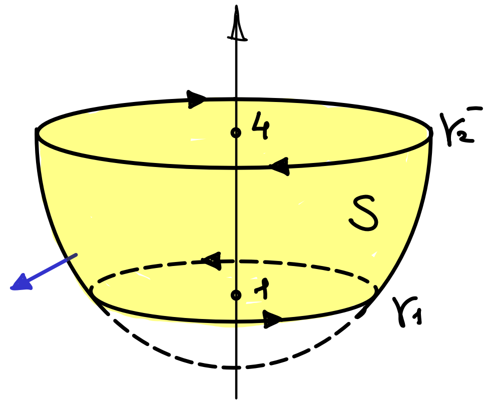
e sia la superficie

$$S = \left\{ (u\cos(v), u\sin(v), u^2) : u \in [1,2], v \in [0,2\pi] \right\}$$

orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \leq 0$.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S} \rangle$ applicando il teorema del rotore.



Posto $x = u\cos(v)$ e $y = u\,\mathrm{sen}(v)$ si ha che S è una parte del paraboloide $z = x^2+y^2$:

$$S = \left\{ (x, y, x^2+y^2) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \right\}$$

(a)

$z = x^2+y^2$ $\qquad$ $<\vec{n},\vec{k}> \leq 0$

$$\iint_S <\vec{F}, d\vec{S}> = \iint_{\{1\leq x^2+y^2\leq 4\}} < \left(yz^2, \frac{4yz}{x^2+y^2}, 2z \right), (2x, 2y, -1) > dx\,dy$$

y-disp

$$= \iint_{\{1\leq x^2+y^2\leq 4\}} \left(2xy(x^2+y^2)^2 + 8y^2 - 2(x^2+y^2) \right) dx\,dy$$

$\leftarrow$ y-simm.

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=1}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (8\rho^2 \mathrm{sen}^2\theta - 2\rho^2)\rho \, d\theta \, d\rho = \pi \int_1^2 4\rho^3 d\rho = 15\pi.$$

(b) Per il teorema del rotore

$$\iint_S <\mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S}> = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} <\vec{F}, d\vec{s}> = \int_{\gamma_1} <\vec{F}, d\vec{s}> - \int_{\gamma_2} <\vec{F}, d\vec{s}>$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(<(\mathrm{sen}\theta, 4\,\mathrm{sen}\theta, *), (-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta, 0)>$$

$$- <(32\,\mathrm{sen}\theta, 8\,\mathrm{sen}\theta, *), (-2\,\mathrm{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)> \Big) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (63\,\text{sen}^2\theta - 12\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\,d\theta = 63\pi$$

dove $\vec{\gamma}_1(t) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$ e $\vec{\gamma}_2(t) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 4)$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.