Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 26-1-2024

Esercizio 1. Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1} + 3(k+3)!\, x^k}{(k+2)!(1+x)^k}.$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente.

(b) Calcolare la somma della serie per $x = 1$.

(a) La serie data si può scrivere come

$$= 2x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

(1) (2)

(1) è una serie di potenze rispetto a $z = \frac{x^2}{1+x}$ e

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{(k+2)!}}{(k+3)\cancel{!}} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \text{converge } \forall z \in \mathbb{R}$$

Così la prima serie converge se $x \neq -1$.

(2) è una serie di potenze rispetto a $z = \frac{x}{1+x}$ e

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to+\infty} \frac{k+4}{k+3} = 1 \Rightarrow R = 1 \\ \text{per } z = \pm 1 \text{ non converge} \\ \text{perché } k+3 \not\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{converge } \forall z \in (-1,1)$$

Così la seconda serie converge se

$$\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1, \quad |x| < |1+x|, \quad \cancel{x^2} < (1+x)^2 = 1 + 2x + \cancel{x^2}, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

Quindi la serie data converge se e solo se $x > -\frac{1}{2}$.

(b) Per $x = 1$ la somma vale

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 3\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 9\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 8\left(e^{1/2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) + 3\frac{1/2}{(1-1/2)^2} + 9\frac{1}{1-1/2}$$

$$= 8\sqrt{e} - 12 + 6 + 18 = 8\sqrt{e} + 12$$

dove si ricorda che $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = xD\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$

Esercizio 2. Sia $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^2$.

(a) Per ogni intero positivo n, determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^n}{f(x,y)}.$$

(b) Determinare il valore il massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x,y) : x^2 - xy + y^2 \le 4/3,\ y \ge 0\}.$$

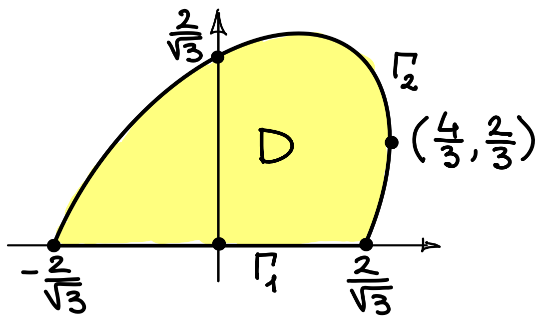
(a) Il limite da calcolare non esiste $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Per $y=0$, con $x \to 0^+$ $\quad \frac{(xy)^n}{f(x,y)} = \frac{0}{2x^2} \to 0$

Inoltre, dato che $f(x,y) = (x+y)(2x-y)$, per $y = -x + x^\alpha$ e $\alpha > 1$ con $x \to 0^+$

$$\frac{(xy)^n}{f(x,y)} = \frac{(-x^2 + x^{\alpha+1})^n}{x^\alpha(3x - x^\alpha)} \sim \frac{(-1)^n x^{2n}}{3x^{\alpha+1}} \not\to 0 \quad \text{se } \alpha > 2n-1.$$

(b) $\nabla f(x,y) = (4x+y,\ x-2y)$



Punti stazionari:

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \in \partial D$$

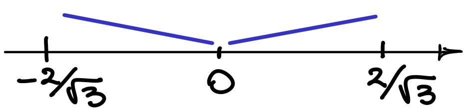
non è interno

Quindi la funzione continua f assume il valore massimo e il valore minimo sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\Gamma_1 = \{(x,0) \text{ con } x \in [-2/\sqrt{3},\ 2/\sqrt{3}]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : x^2 - xy + y^2 = 4/3,\ y > 0\}$$

Γ_1) $f(x,0) = 2x^2$



$$\boxed{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0) = \frac{8}{3} \end{array}}$$

Γ_2) Sia $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4/3$.

I punti di Γ_2 sono regolari:

$\nabla g(x,y) = (2x - y,\ -x + 2y) = (0,0)$ solo in $(0,0) \notin \Gamma_2$

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 4x+y=\lambda(2x-y) \\ x-2y=\lambda(-x+2y) \\ x^2-xy+y^2=4/3 \end{cases} \to (x-2y)(1+\lambda)=0$$

$$x=2y \qquad \lambda=-1$$

$$\begin{cases} x=2y \\ x^2-xy+y^2=4/3 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=-1 \\ 4x+y=\lambda(2x-y) \to 6x=0 \to x=0 \\ x^2-xy+y^2=4/3 \to y=+\cancel{-}\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$4y^2-2y^2+y^2=4/3$$

$$y=+\cancel{-}\frac{2}{3} \qquad \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\in\Gamma_2 \qquad \boxed{f\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=4} \qquad \left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\in\Gamma_2 \qquad \boxed{f\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4}{3}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è 4 e quello minimo è $-\frac{4}{3}$.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y) : 0 < x \le y^2 \le 8x,\ 1 \le xy \le 8\}$.

(a) Disegnare D e calcolare

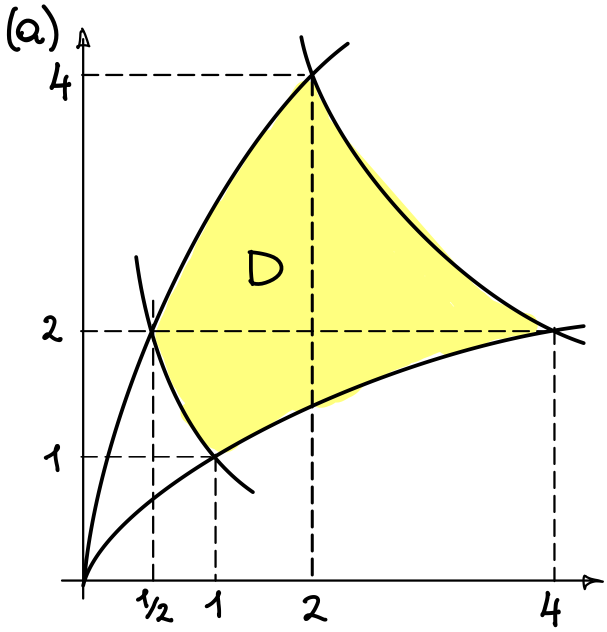
$$\iint_D \frac{x^2 y}{x+y^2}\, dxdy$$

usando il cambio di variabili $u = y^2/x$ e $v = xy$.

(b) Trovare un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ tale che $\boldsymbol{F}(2,1) = (1,3)$ e

$$\int_{\partial^+ D} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = \iint_D \frac{x^2 y}{x+y^2}\, dxdy.$$

(a)



$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = u^{-1/3} v^{2/3} \\ y = u^{1/3} v^{1/3} \end{cases}$$

$$J_{\vec\Phi}(u,v) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} u^{-4/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{-1/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{1/3} v^{-2/3} \end{bmatrix}$$

$$|\det(J_{\vec\Phi})| = \left| -\frac{1}{9} u^{-1} - \frac{2}{9} u^{-1} \right| = \frac{1}{3} u^{-1}$$

$$J_{\vec\Phi}^{-1}(D) = [1,8] \times [1,8]$$

$$\iint_D \frac{x^2 y}{x+y^2}\, dxdy = \iint_{[1,8]\times[1,8]} \frac{v}{1+u} \cdot \frac{1}{3} u^{-1}\, du\, dv = \frac{1}{3} \int_1^8 v\, dv \cdot \int_1^8 \frac{1}{u(1+u)}\, du$$

$\hookrightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^8 \cdot \left[\log\left(\frac{u}{u+1}\right) \right]_1^8 = 21 \log(4/3).$$

(b) Per la formula di Gauss-Green basta trovare $\vec F = (F_1, F_2)$ tale che $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{x^2 y}{x+y^2}$ e $F_1(2,1) = 1$, $F_2(2,1) = 3$.

Ad esempio si può fissare $F_2 = 3$ e ottenere F_1 integrando:

$$F_1 = -\int \frac{x^2 y}{x+y^2}\, dy = -x^2 \cdot \frac{1}{2} \log(x+y^2) + c.$$

Imponendo $F_1(2,1) = 1$ si ottiene $c = 2\log(3) + 1$. Così

$$\vec F(x,y) = \left(-\frac{x^2}{2} \log(x+y^2) + 2\log(3) + 1,\ 3 \right).$$

Esercizio 4. Sia $S = \{(x,y,z) : (x^2+y^2)(z+1)^2 = 4,\ 0 \le z \le 1\}$.
La superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)^2\, dS$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S} \rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(ze^x, 4xy^2, z\right)$.

(a) Parametrizzazione di S:

$$(x^2+y^2)(z+1)^2 = 4 \overset{0 \le z \le 1}{\Longrightarrow} z = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Così $\vec{\sigma}(x,y) = \left(x, y, -1 + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ con $A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ e

$$\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y} = \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1 \right)$$ orientazione corretta

$$\|\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y}\| = \left(\frac{4x^2+4y^2}{(x^2+y^2)^3} + 1 \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{4}{\rho^4}\right)^{1/2}$$

Quindi

$$\iint_S (x^2+y^2)^2 dS = \iint_A (x^2+y^2)^2 \|\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y}\| dx\,dy \overset{CP}{=} \int_{\rho=1}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^4 \left(1 + \frac{4}{\rho^4}\right)^{1/2} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_1^2 (\rho^4+4)^{1/2} \rho^3 d\rho = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}} \left[\frac{(\rho^4+4)^{3/2}}{3/\cancel{2}} \right]_1^2 = \frac{7 \cdot 5^{3/2}}{3} \pi .$$

(b) Il bordo di S è dato da due circonferenze

γ_1: $z=1$, $x^2+y^2=1$ e γ_2: $z=0$, $x^2+y^2=4$

Vista l'orientazione di S, γ_1 è orientata in senso antiorario e γ_2 in senso orario:

$$\vec{\gamma_1}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) \qquad t \in [2\pi, 0]$$
$$\vec{\gamma_2}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Così per il teo. del rotore,

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 16\pi - \pi = 15\pi .$$

perché

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (0, 32\cos t \,\mathrm{sen}^2 t, 0), (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 0) \rangle dt$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(2t) dt = 16\pi$$

e

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = - \int_0^{2\pi} \langle (e^{\cos t}, 4\cos t \,\mathrm{sen}^2 t, 1), (-\mathrm{sen}\, t, \cos t, 0) \rangle dt$$

$$= -\left[e^{\cos t} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(2t) dt = 0 - \pi = -\pi .$$