Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 4-9-2023

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = |x+y|$.

(a) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \left\{(x,y) : y^2 \le x+4,\ x \le \sqrt{4-y^2}\right\}.$$

(b) Fare un esempio di insieme aperto, non vuoto e limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che la funzione f non abbia in A nè punti di minimo nè punti di massimo.

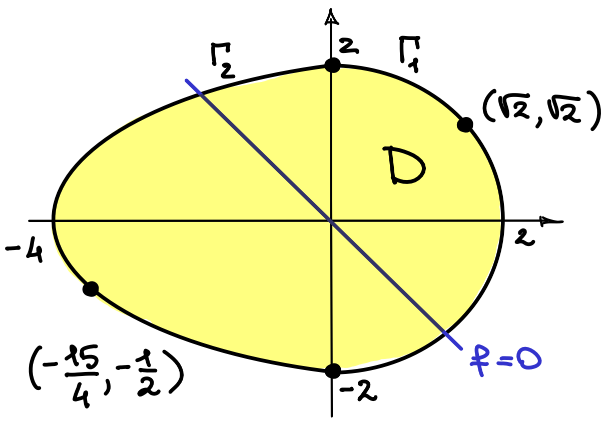
(a) Dato che $f(x,y) = |x+y| \geq 0$ e $f=0$ lungo la retta $y=-x$ che interseca D, il valore minimo di f in D è 0. Per determinare il valore massimo consideriamo $h(x,y) = x+y$.

$\nabla h(x,y) = (1,1)$ e quindi h non ha punti stazionari.

Analisi lungo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$\Gamma_1 = \{(x,y) : x^2+y^2=4,\ x\in[0,2]\}$

$\Gamma_2 = \{(x,y) : y^2 = x+4,\ x \in [-4,0)\}$



Γ_1) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x,y) = x^2+y^2-4=0$.

$\nabla g(x,y) = (2x,2y) \neq (0,0)$ in Γ_1 (Γ_1 è regolare)

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \xrightarrow{\lambda\neq 0} x=y \quad \to x^2+x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2},\sqrt{2}) \in D$

$(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \notin D$

estremi di Γ_1

$\boxed{h(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}}$, $\boxed{h(0,\pm 2) = \pm 2}$

Γ_2) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x,y) = y^2-x-4=0$.

$\nabla g(x,y) = (-1,2y) \neq (0,0)$ in Γ_2 (Γ_2 è regolare)

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ 1 = 2\lambda y \\ y^2 = x+4 \end{cases} \to \lambda=-1,\quad y = -1/2,\quad x = \frac{1}{4}-4 = -\frac{15}{4}$$

$(-\frac{15}{4},-\frac{1}{2}) \in D$

$\boxed{h(-\frac{15}{4},-\frac{1}{2}) = -\frac{17}{4}}$

Confrontando i valori si ha $h(D) = \left[-\frac{17}{4}, 2\sqrt{2}\right]$
e quindi applicando il valore assoluto si trova
che il valore massimo di f in D è $\frac{17}{4}$ $(>2\sqrt{2})$.

(b) Sia A un aperto non vuoto e limitato che
non interseca la retta $y=-x$.
Allora f è differenziabile in A e

$$\nabla f = (\pm 1, \pm 1) \neq (0,0).$$

Quindi ogni punto di A è interno e non stazionario e dunque non può essere né di massimo né di minimo. Un esempio è

$$A = (0,1) \times (0,1).$$

Esercizio 2. Sia $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ con $t \in [0, 2]$.

(a) Calcolare $\displaystyle \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma (x^2 + z^2)ds$.

(b) Calcolare $\displaystyle \int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(z + \log(1 + z), -\frac{1}{(2 + y)^2}, \frac{x}{1 + z}\right)$.

(a) $\vec{\gamma}'(t) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1)$ da cui

$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(2\pi)^2+1}$ e $|\gamma| = \int_0^2 \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt = 2\sqrt{(2\pi)^2+1}$.

Così

$$\frac{1}{|\gamma|}\int_0^2 (x^2+z^2)\,ds = \frac{1}{|\gamma|}\int_0^2 \left((\cos(2\pi t))^2 + t^2\right)\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\cos^2(2\pi t) + t^2\right)dt = \frac{1}{2}\left(1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2\right) = \frac{11}{6}.$$

(b) Si nota che $\vec{F} = \nabla U + (z, 0, 0)$ con

$$U(x, y, z) = x\log(1+z) + \frac{1}{2+y}.$$

Dunque

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = U(\vec{\gamma}(2)) - U(\vec{\gamma}(0)) + \int_\gamma \langle (z,0,0), d\vec{s}\rangle$$

$$= U(1,0,2) - U(1,0,0) + \int_0^2 t\cdot(-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t))\,dt$$

$u = 2\pi t$

$$\overset{\downarrow}{=} \log(3) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} u \operatorname{sen}(u)\,du \qquad \text{(per parti)}$$

$$= \log(3) - \frac{1}{2\pi}\Big[-u\cos(u) + \operatorname{sen}(u)\Big]_0^{4\pi} = \log(3) + 2.$$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ |x| + |y| \ge 1\}$.

(a) Determinare il piano tangente al bordo di D in $(1, 1, \sqrt{2})$ e il piano tangente al bordo di D in $(1/2, 1/2, 1)$.

(b) Calcolare $\iiint_D |z|\, dxdydz$.

(a) Il punto $(1,1,\sqrt{2})$ sta sulla superficie

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 4$$

e dunque il piano tangente è

$$\langle \underbrace{\nabla f(1,1,\sqrt{2})}_{=(2,2,2\sqrt{2})}, (x-1, y-1, z-\sqrt{2}) \rangle = 0 \Rightarrow x+y+\sqrt{2}z = 4.$$

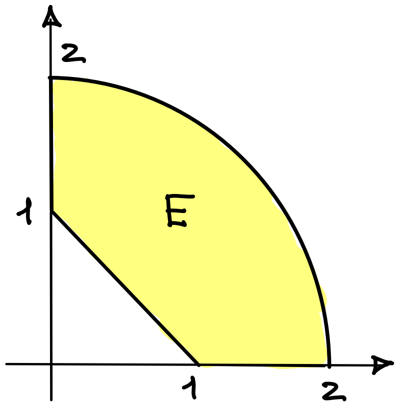
Il punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ sta sulla superficie

$$f(x,y,z) = |x|+|y| = 1$$

e dunque il piano tangente è

$$\langle \underbrace{\nabla f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1)}_{=(1,1,0)}, (x-\tfrac{1}{2}, y-\tfrac{1}{2}, z-1) \rangle = 0 \Rightarrow x+y = 1.$$

(b) Per simmetria



$$\iiint_D |z|\,dxdydz = 8\iint_E \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\right) dxdy$$

$$= 4\iint_E (4-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= 4\iint_{\substack{\{x^2+y^2\le 4\}\\ x,y\ge 0}} (4-x^2-y^2)\,dxdy - 4\iint_{\substack{\{x+y\le 1\}\\ x,y\ge 0}} (4-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= 4\int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} (4-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta - 4\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} (4-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$= 2\pi \left[4\rho - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 - 4\int_0^1 \left((4-x^2)(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx$$

$$3s + 2s^2 - \frac{4s^3}{3}$$

$$= 2\pi (8-4) - 4\int_0^1 \left((4-(1-s)^2)s - \frac{s^3}{3} \right) ds \qquad (s = 1-x)$$

$$= 8\pi - 4\left[\frac{3s^2}{2} + \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3} \right]_0^1 = 8\pi - \frac{22}{3}.$$

Esercizio 4. Si consideri la superficie

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y + z = 1,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$$

orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \geq 0$ e sia $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (6y, 1 - z^2, 3x)$.

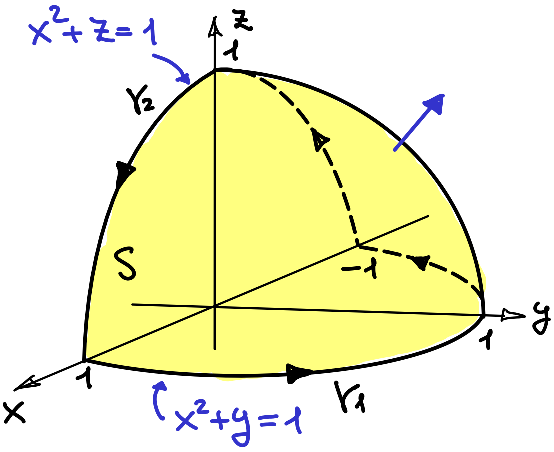
(a) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di S percorsa nel verso dato dall'orientazione indotta da S.

(b) Verificare il calcolo svolto in (a) applicando il teorema del rotore.

(a) Abbiamo che $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2$

$$\vec{\gamma}_1 = (t, 1-t^2, 0) \quad t \in [1, -1]$$

$$\vec{\gamma}_2 = (t, 0, 1-t^2) \quad t \in [-1, 1]$$



Calcolo diretto:

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \int_1^{-1} \langle (6(1-t^2), 1, 3t), (1, -2t, 0) \rangle \, dt + \int_{-1}^{1} \langle (0, 1-(1-t^2)^2, 3t), (1, 0, -2t) \rangle \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} -6(1-\cancel{t^2}) + 2t - \cancel{6t^2} = -6 \cdot 2 \int_0^1 dt = -12.$$

(b) Applichiamo il teorema del rotore.

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6y & 1-z^2 & 3x \end{bmatrix} = (2z, -3, -6).$$

Parametrizzazione (cartesiana) di S:

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 1-x^2-y) \quad \text{con } A = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1-x^2 \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right\}$$

Così $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (2x, 1, 1)$ orientazione verso l'alto

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_{S} \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_{A} \langle (2\overset{1-x^2-y}{\overset{\parallel}{z}}, -3, -6), (2x, 1, 1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= \iint_{A} \Big(\underbrace{4x(1-x^2-y)}_{x\text{-dispari}} - 9 \Big) \, dx\,dy = -9|A|$$

← simmetrico per $x=0$

$$= -9 \cdot 2 \int_0^1 (1-x^2)\,dx = -18 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -12.$$