Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 27-1-2023

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4$.
(a) Individuare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella. Ci sono punti di massimo/minimo assoluto?
(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}.$$

(c) Trovare un esempio di insieme non limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che la funzione f è limitata in A.

(a) $\nabla f(x,y) = (8x + 4xy, 2y + 2x^2)$ $\quad H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 8+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 8x+4xy=0 \to 4x(2+y)=0 \to x=0,\ y=-2 \\ 2y+2x^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ 2y+0=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-2 \\ -4+2x^2=0 \to x^2=2 \end{cases}$$

$$(0,0) \qquad (\sqrt{2},-2), (-\sqrt{2},-2)$$

Quindi

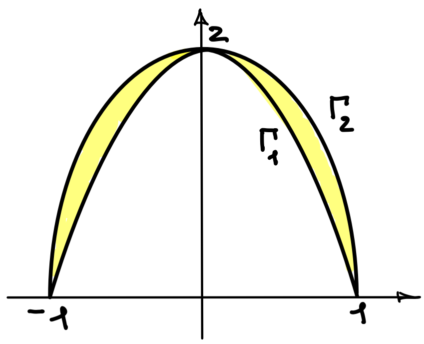
$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{autovalori}>0} (0,0) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f(\pm\sqrt{2},-2) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 4\sqrt{2} \\ \pm 4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\det(H)<0} (\sqrt{2},-2) \text{ e } (-\sqrt{2},-2) \text{ sono punti di SELLA}$$

Non ci sono punti di MAX/MIN ASSOLUTO perché
$$f(x,x) = 4x^2 + x^2 + 2x^3 - 4 \to \pm\infty \text{ per } x \to \pm\infty.$$

(b) D è un insieme compatto e nessuno dei punti stazionari determinati in (a) è interno a D.
Quindi la funzione continua f assume il valore massimo e il valore minimo sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : 2x^2 + y = 2 \text{ e } x \in [-1,1]\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x \in [-1,1]\}$$



Γ_1) Posto $y = 2-2x^2$ si ha che

$$f(x, 2-2x^2) = 4x^2 + 4(1-x^2)^2 + 4x^2(1-x^2) - 4$$
$$= \cancel{4x^2} + \cancel{4} - \cancel{8x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2} - \cancel{4x^4} - \cancel{4} = 0 \quad \text{costante}$$

$\boxed{f(x,y)=0}$ $\forall (x,y) \in \Gamma_1$

Γ_2) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x,y)=4x^2+y^2-4=0$.

$\nabla g(x,y)=(8x,2y)\neq(0,0)$ in Γ_2 (Γ_2 è regolare).

$$\begin{cases} 8x+4xy=\lambda 8x \\ 2y+2x^2=\lambda 2y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad 8x+4xy=\lambda 8x \to 4x(2+y-2\lambda)=0 \to x=0 \quad 2\lambda=2+y$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \dots \\ 0+y^2=4 \to y=\cancel{\pm}2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\lambda=2+y \\ \cancel{2y}+2x^2=(2+y)y=\cancel{2y}+y^2 \to y^2=2x^2=\frac{4}{3} \\ 4x^2+y^2=4 \to 4x^2+2x^2=4 \to x^2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$(0,2) \leftarrow$ già in Γ_1

$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8}{3\sqrt{3}}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ e quello minimo è 0.

(c) Da quanto visto in (b) f è identicamente 0 sulla parabola $y=2-2x^2$. Quindi f è limitata nell'insieme non limitato $A=\{(x,2-2x^2): x\in\mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. Si consideri il solido

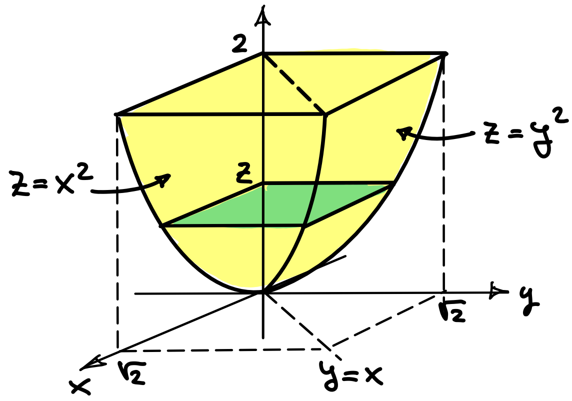
$$D = \{(x,y,z) : x^2 \le z \le 2, y^2 \le z \le 2\}.$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+z^2)\,dxdydz.$$

(b) Calcolare l'area totale della superficie data dal bordo di D.

Il solido D è formato da 4 parti simmetriche (in figura la parte nel primo ottante).



Le sezione orizzontale S_z ad altezza $z \in [0,2]$ è il quadrato $[-\sqrt{z},\sqrt{z}] \times [-\sqrt{z},\sqrt{z}]$

(a) $$|D| = \int_0^2 |S_z|\,dz = \int_0^2 (2\sqrt{z})^2 dz = 4\int_0^2 z\,dz = 4\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = 8.$$

Inoltre

$$\iiint_D (x^2+z^2)\,dxdydz = \int_{z=0}^2 \left(\iint_{S_z} (x^2+z^2)\,dxdy\right) dz$$

$$= \int_{z=0}^2 \left(\int_{x=-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} x^2 \cdot 2\sqrt{z}\,dx\right) dz + \int_0^2 z^2 |S_z|\,dz$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{z}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dz + \int_0^2 z^2 \cdot 4z\,dz = \frac{4}{3}\int_0^2 z^2 dz + 4\int_0^2 z^3 dz$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^2 + 4\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 = \frac{32}{9} + 16.$$

Così

$$\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+z^2)\,dxdydz = \frac{1}{8}\left(\frac{32}{9}+16\right) = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}.$$

(b) Il bordo di D è formato dal quadrato nel piano $z=2$ e una superficie laterale formata da 8 parti di area uguale.

Una di queste parti è parametrizzata da

$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,x^2) \quad \text{con } A=\{(x,y):\ 0\leq y\leq x\leq\sqrt{2}\}$$

Allora $\|\vec{\sigma}_x\times\vec{\sigma}_y\|=\|(-2x,0,1)\|=\sqrt{1+4x^2}$ e

$$|\partial D| = 8\int_{x=0}^{\sqrt{2}}\int_{y=0}^{x}\sqrt{1+4x^2}\,dx\,dy+(2\sqrt{2})^2$$

$$=8\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx+8=\cancel{8}\left[\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\cancel{8}}\right]_0^{\sqrt{2}}+8$$

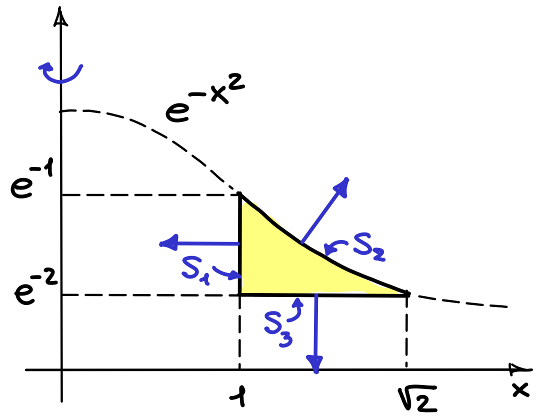
$$=\frac{2}{3}(27-1)+8=\frac{76}{3}.$$

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2x - \dfrac{y}{z^2}, 4xy, -6z\right)$.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, e^{-2} \le z \le e^{-1}\}$.
La superficie S_1 è orientata in modo che il versore normale in $(1,0,e^{-1})$ sia $\boldsymbol{n} = (-1,0,0)$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $S_2 = \left\{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2 \le 2, z = e^{-x^2-y^2}\right\}$.
La superficie S_2 è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

(a) Parametrizzazione di S_1



$\vec{\sigma}(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$

con $A = [0,2\pi]\times[e^{-2}, e^{-1}]$

$\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_z} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ ← orientazione opposta

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = -\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}\int_0^{2\pi} \left\langle \left(2\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{z}, 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta, *\right), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\right\rangle d\theta\, dz$$

$\int_0^{2\pi} \cdot\, d\theta = 0$

$$= -\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}\int_0^{2\pi} \left(2\cos^2\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{z} + 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) d\theta\, dz$$

$$= -2\pi\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} dz = -2\pi(e^{-1} - e^{-2}).$$

(b) In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema della divergenza al dominio D

$$D = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ e^{-2} \le z \le e^{-x^2-y^2}\}$$

dove $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientato verso l'esterno con $S_3 = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ z = e^{-2}\}$. Quindi

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz - \iint_{S_1\cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle$$

$$= (8\pi e^{-2} - 4\pi e^{-1}) - \left(-2\pi(e^{-1} - e^{-2}) + 6\pi e^{-2}\right) = -2\pi e^{-1}$$

dove

$$\iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{\{1 \le x^2+y^2 \le 2\}} \langle (*, *, -6\overset{e^{-2}}{\overset{\parallel}{z}}), (0,0,-1) \rangle \, dx\,dy = 6\pi e^{-2}$$

e

$$\iiint_{D} \overset{-4+4x \quad x \text{ dispari}}{\mathrm{div}(\vec{F})}\, dx\,dy\,dz \overset{CC}{=} -4 \int_{\rho=1}^{\sqrt{2}} \int_{z=e^{-2}}^{e^{-\rho^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho \, dz$$

$D \leftarrow$ simmetrico per $x=0$

$$= -4 \cdot 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (e^{-\rho^2} - e^{-2}) \rho \, d\rho = -\overset{4}{\cancel{8}}\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{\cancel{2}} - e^{-2} \frac{\rho^2}{\cancel{2}} \right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 4\pi \left(e^{-2} - e^{-1} + e^{-2}(2-1) \right) = 8\pi e^{-2} - 4\pi e^{-1}.$$

Esercizio 4. Siano $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\log(z), xy^2, \frac{x}{z}\right)$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8 - x^2 - y^2, z \geq x^2 + 3y^2\right\}.$$

La superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di S percorsa nel verso indotto dall'orientazione di S.

(b) Verificare il calcolo diretto svolto in (a) applicando il teorema del rotore.

Notiamo che $\vec{F} = \underbrace{(0, xy^2, 0)}^{\vec{G}} + \nabla(x\log(z))$ campo conservativo

quindi basta fare il calcolo per il campo $\vec{G}$.

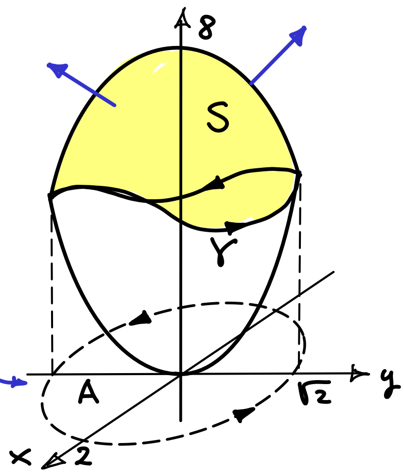
(a) Parametrizzazione di γ.

γ è dato dal sistema

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases} \rightarrow 8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

$$2x^2 + 4y^2 = 8$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \quad \text{ellisse}$$



Così

$$\vec{\gamma}(t) = \left(2\cos t, \sqrt{2}\sin t, 8 - (2\cos t)^2 - (\sqrt{2}\sin t)^2\right) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

e dunque

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{(0, xy^2, 0)}_{\vec{G}}, (*, (\sqrt{2}\sin t)', *)\rangle\, dt$$

$2\cos t \cdot (\sqrt{2}\sin t)^2$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\cos^2 t \sin^2 t\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt \overset{s=2t}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(s)\, ds = \sqrt{2}\pi.$$

(b) Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 8 - x^2 - y^2) \quad \text{con } A = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1\right\}$$

e quindi $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (2x, 2y, 1)$ verso l'alto.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{G}) = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & xy^2 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, y^2).$$

Allora per il teorema del rotore

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_{S} \langle rot(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_{A} \langle (0,0,y^2), (2x,2y,1) \rangle dxdy$$

$$= \iint_{A} y^2 dxdy \underset{\begin{cases} x = 2X \\ y = \sqrt{2}Y \end{cases}}{=} \iint_{\{X^2+Y^2 \leq 1\}} (\sqrt{2}Y)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}\, dXdY$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} 4\sqrt{2}\, \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \pi = \sqrt{2}\,\pi.$$