Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 21-1-2022

Esercizio 1. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2} \frac{k3^k + 2^k e^k}{k^2 x^k (1-x)^k}$$

è convergente.

Sia $z = \dfrac{1}{x(1-x)}$ e consideriamo la serie di potenze in z.

Raggio di convergenza:

$$|a_k|^{1/k} = \left(\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2} \frac{k3^k+2^ke^k}{k^2}\right)^{1/k} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{k}\right)^k}_{\to \frac{1}{e}} \cdot 2e \, \frac{\left(\left(\overbrace{\frac{k3^k}{2^ke^k}}^{2e>3 \,\to\, 0}\right)+1\right)^{1/k}}{\underbrace{k^{2/k}}_{\to 1}} \longrightarrow \frac{1}{e} \cdot 2e \cdot 1 = 2$$

da cui $R = 1/2$.

Estremi: per $z = \pm 1/2$ converge assolutamente perché

$$\left|a_k \left(\pm\tfrac{1}{2}\right)^k\right| = \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2} \cdot \frac{\cancel{2^k} e^k \cdot (1+o(1))}{k^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}}$$

$$= \exp\left(k^2 \log\left(1-\frac{1}{k}\right)+k\right) \cdot \frac{1+o(1)}{k^2} \sim \frac{e^{-1/2}}{k^2} \quad \text{serie convergente}$$

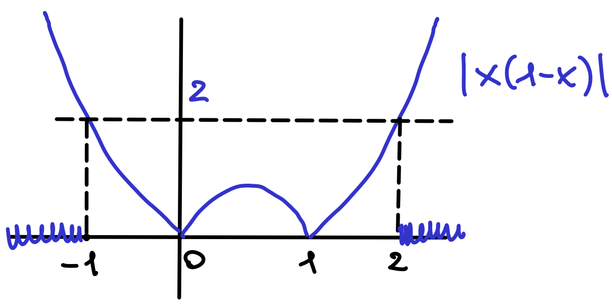
$$k^2\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) + k \to -\frac{1}{2}$$

Quindi la serie di potenze converge per $|z| \le \frac{1}{2}$.

Convergenza rispetto a x:

$$\underset{x \neq 0,1}{\frac{1}{|x(1-x)|} \le \frac{1}{2}} \iff |x(1-x)| \ge 2$$

$$\iff \boxed{x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)}$$



Esercizio 2. Sia $f(x,y) = e^{xy}$.
(a) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.
(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le x + \sqrt{2}, x^2 + 4y^2 \le 8\}.$$

(c) Determinare un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ tale che il valore massimo di f in R è 1 mentre il valore è minimo $1/e$.

(a) $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

$$\begin{cases} ye^{xy} = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ unico punto stazionario}$$

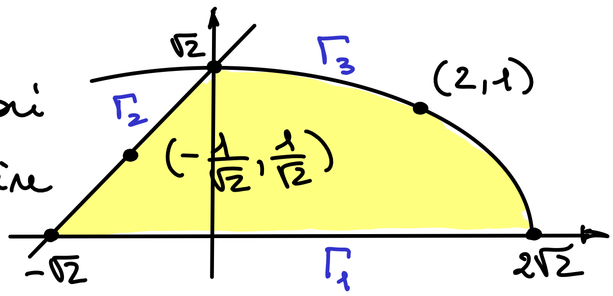
$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2e^{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det H = -1 < 0$

$\boxed{(0,0) \text{ è un PUNTO DI SELLA}}$

(b) $D = \left\{ 0 \le y \le x + \sqrt{2},\ \dfrac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \le 1 \right\}$

D è compatto e f è C^∞ in $\mathbb{R}^2$.
Dato che f non ha punti stazionari interni a D, i punti di max/min sono sul bordo:

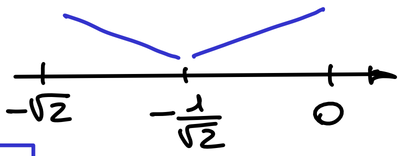


$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in [-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]\}$, $\boxed{f(x,0) = 1}$ costante

$\Gamma_2 = \{(x, x+\sqrt{2}) : x \in (-\sqrt{2}, 0]\}$,

$$f(x, x+\sqrt{2}) = e^{x(x+\sqrt{2})}$$



con $\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}}$ e $\boxed{f(0,\sqrt{2}) = 1}$

$\Gamma_3 = \{(x,y) : x^2+4y^2=8,\ x>0, y>0\}$

Moltiplicatori di Lagrange con vincolo

$$g(x,y) = x^2+4y^2-8=0.$$

$$\nabla g = (2x, 8y) = (0,0) \iff (x,y)=(0,0) \notin \Gamma_3$$

tutti i punti di Γ_3 sono regolari.

$$\begin{cases} \overset{>0}{y} e^{xy} = \overset{\neq 0}{\lambda} 2x \quad \cdot x \\ x e^{xy} = \lambda 8y \quad \cdot y \\ x^2+4y^2 = 8 \end{cases} \quad \xrightarrow{+} \quad \begin{aligned} &\lambda 2x^2 = \lambda 8y^2 \\ &2\lambda(x^2-4y^2)=0 \\ &x^2 = 4y^2 \to x = \pm 2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2y \\ (\pm 2y)^2 + 4y^2 = 8 \to y^2 = 1 \to \end{cases} \begin{aligned} &x = \cancel{\pm}\, 2 \\ &y = \cancel{\pm}\, 1 \end{aligned} \qquad (2,1) \in \Gamma_3$$

Punto stazionario vincolato: $(2,1)$ con $\boxed{f(2,1) = e^2}$

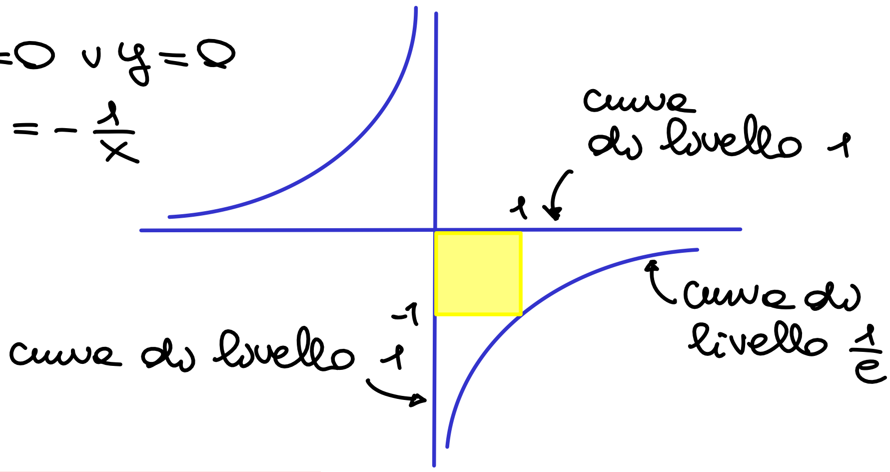
Confrontando i valori si ha che

$$\boxed{\max_D f(x,y) = e^2 \quad e \quad \min_D f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

(c) Disegnamo le curve di livello 1 e 1/e

$e^{xy} = 1 \iff x=0 \vee y=0$

$e^{xy} = \frac{1}{e} \iff y = -\frac{1}{x}$



Il rettangolo $\boxed{R = [0,1] \times [0,-1]}$ soddisfa le richieste:

$$\forall (x,y) \in R \qquad f(1,-1) = e^{-1} \leq e^{xy} \leq e^0 = f(0,0) = 1.$$

$$-1 \leq xy \leq 0$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\text{(a)} \iiint_D |x-1|\,dxdydz \qquad\qquad \text{(b)} \iiint_D \frac{x(1-y)+z}{4+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z) : x \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

(a) $$\iiint_D |x-1|\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{2} |x-1| \Big(\iint_{\substack{\{y^2+z^2\le 4-x^2\} \\ z\ge 0}} dy\,dz \Big) dx = \int_0^2 |x-1| \cdot \Big(\frac{\pi}{2}(4-x^2)\Big)\,dx$$

Area

semicerchio di raggio $\sqrt{4-x^2}$

$$= \frac{\pi}{2}\Big(\int_0^1 (1-x)(4-x^2)\,dx - \int_1^2 (1-x)(4-x^2)\,dx\Big)$$

$$4-4x-x^2+x^3 \xrightarrow{\int} 4x-2x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}\Big(2\big(\cancel{4}-\cancel{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\big)-0-\big(\cancel{8}-\cancel{8}-\frac{8}{3}+\cancel{4}\big)\Big) = \frac{15\pi}{12} = \boxed{\frac{5\pi}{4}}$$

(b) $$\iiint_D \frac{x-xy+z}{4+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D \frac{x+z}{4+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

y-dispari

simmetrico rispetto a $y=0$

$$\overset{CS}{=} \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{4+\rho^2}\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho^3}{4+\rho^2}\,d\rho \cdot \Big(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta + \pi \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \Big)$$

$$\rho - \frac{4\rho}{4+\rho^2}$$

$$= \Big[\frac{\rho^2}{2} - 2\log(4+\rho^2)\Big]_0^2 \cdot \Big(\frac{\pi}{4}\cdot\big[\sin\theta\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\Big[\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi/2}\Big)$$

$$= (2-2\log 2)\cdot\Big(\frac{\pi}{4}\cdot 2 + \frac{\pi}{2}\Big) = \boxed{2\pi(1-\log 2)}$$

Esercizio 4. Calcolare $\iint_S \langle \text{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S}\rangle$ sia direttamente che usando il teorema del rotore, dove

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(4y + xz, e^y, xy + z^2\right)$$

e S è la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 2z = 4, z \geq 1\right\}.$$

S è orientata in modo che il versore normale in $(0,0,2)$ sia $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$.

Calcolo diretto:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4y+xz & e^y & xy+z^2 \end{bmatrix} = (x, x-y, -4).$$

Parametrizzazione (cartesiana) di S:

$$x^2+2y^2 = 4-2\underbrace{z}_{\geq 1} \leq 4-2$$

$$\vec{\sigma}(x,y) = \Big(x, y, \underbrace{2-\frac{x^2}{2}-y^2}_{= f(x,y)}\Big) \text{ con } A = \left\{(x,y) : x^2+2y^2 \leq 2\right\}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+y^2 \leq 1$$

con

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (x, 2y, 1)$$

che induce l'orientazione su S tale che in $(0,0,2)$, $\vec{n} = (0,0,1)$ opposta a quella data.

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S}\rangle = -\iint_A \langle (x, x-y, -4), (x, 2y, 1)\rangle \, dx\,dy$$

$$= -\iint_{\{x^2+2y^2 \leq 2\}} (x^2 + \underbrace{2xy}_{\text{dispari}} - 2y^2 - 4)\, dx\,dy$$

$\{x^2+2y^2\leq 2\}$ → simmetrico rispetto a $x=0$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} = -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1} \left(2\rho^2\cos^2\theta - 2\rho^2\,\text{sen}^2\theta - 4\right)\sqrt{2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \cancel{-2\sqrt{2}\cdot\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 + 2\sqrt{2}\,\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1} + 4\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{4\sqrt{2}\,\pi}$$

Con il teorema del rotore:

$$\iint_S \langle rot(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma^-} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove l'ellisse $\gamma = \partial S$ è orientata in senso orario:

$$\vec{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t, 1) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi],$$

$$= -\int_0^{2\pi} \langle (4\overset{\sin t}{y} + \overset{\sqrt{2}\cos t}{x}z, e^{\overset{\sin t}{y}}, xy + z^2), \overset{\vec{\gamma}'(t)}{(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, 0)} \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\sqrt{2}\sin^2 t + 2\sin t \cos t - e^{\sin t}\cos t\right) dt$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\pi + \left[\sin^2(t)\right]_0^{2\pi} - \left[e^{\sin t}\right]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi + 0 + 0 = \boxed{4\sqrt{2}\pi}$$